



**Simpósio de Métodos
Numéricos em Engenharia**

25 a 27 de outubro, 2017

Aplicação do Método de Rayleigh-Ritz para Calcular a Deflexão de Vigas Bi-apoiadas

Eliton Voronovcz, Adilandri M. Lobeiro
Henrique A. B. Mognon
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Departamento Acadêmico de Matemática (DAMAT)
Campo Mourão, Brasil
elitonvoronovcz@alunos.utfpr.edu.br, alobeiro@utfpr.edu.br,
henriquemognon@alunos.utfpr.edu.br

Liliana Madalena Gramani
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Departamento de Matemática (DMAT)
Curitiba, Brasil
gramani@ufpr.br

Resumo—Neste trabalho obteve-se a solução numérica da Equação Diferencial Parcial, que controla a deflexão de uma viga bi-apoiada, via o Método de Rayleigh-Ritz que foi comparado com a solução analítica, para comprovação do método. Com a discretização da viga gerou-se um sistema de equações lineares, cuja solução desse foi obtido por meio do Método de Eliminação de Gauss, com uso de um algoritmo implementado no software Maple, o que mostrou a efetividade do método.

Palavras-chave—Método de Rayleigh-Ritz; Viga bi-apoiada; Condições de Contorno; Equação Diferencial Parcial;

I. INTRODUÇÃO

A Equação Diferencial Parcial (EDP) que controla a deflexão de uma viga bi-apoiada, é dada por

$$-\frac{d}{dx} \left(\rho(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x), \quad (1)$$

em que, $\rho(x)$ e $f(x)$ são as tensões adicionadas, $q(x)$ é a seção transversal variável e $y(x)$ é a deflexão da viga representada pela equação (1). A EDP está definida em $\Omega = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ conforme [1] e sujeita as seguintes condições de contorno $y(0) = y(1) = 0$.

II. DESENVOLVIMENTO

Para obter a solução numérica da EDP (1), utilizou-se o Método de Rayleigh-Ritz com *B-Splines* Cúbicas, para comparar com a solução

analítica e verificar a efetividade do método. A equação (1) foi discretizada no eixo das abscissas, em “ n ” partes iguais de comprimento $h = 1/(n + 1)$, com $x_i = 0, 1i$, em que $i = 0, \dots, n, n + 1$, conforme ilustra a Figura 1.

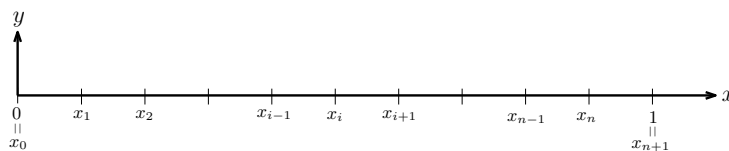


Figura 1: Discretização do domínio Ω

O *B-Spline* Cúbica S utilizado e as funções de base ϕ_i [1] são tais que,

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -2, \\ \frac{1}{4}(2+x)^3, & \text{se } -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{1}{4}[(2+x)^3 - 4(1+x)^3], & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{4}[(2-x)^3 - 4(1-x)^3], & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{4}(2-x)^3, & \text{se } 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{se } 2 < x. \end{cases} \quad (2)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} S\left(\frac{x}{h}\right) - 4S\left(\frac{x+h}{h}\right), & \text{se } i = 0, \\ S\left(\frac{x-h}{h}\right) - S\left(\frac{x+h}{h}\right), & \text{se } i = 1, \\ S\left(\frac{x-ih}{h}\right), & \text{se } 2 \leq i \leq n-1, \\ S\left(\frac{x-nh}{h}\right) - S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right), & \text{se } i = n, \\ S\left(\frac{x-(n+1)h}{h}\right) - 4S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right), & \text{se } i = n+1. \end{cases} \quad (3)$$

Sabe-se $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas e não nulas no intervalo $\Omega = x|0 \leq x \leq 1$, tem-se a matriz de aproximação de *Rayleigh-Ritz* com largura de banda no máximo sete [1], em que:

$$a_{i,j} = \int_1^0 [p(x)\phi'_i(x)\phi'_j(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)] dx,$$

$$b_i = \int_1^0 f(x)\phi_i(x)dx,$$

para cada $i = 0, 1, \dots, n+1$.

Para um estudo de caso, considerou-se a seguinte EDP (4)

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) + \frac{\pi^2}{4} y = \frac{\pi^2}{16} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right), \quad (4)$$

que possui solução analítica, tal que

$$y(x) = -\frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{6} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right).$$

Considerou-se $n = 9$, $h = 0,1$, com $i = 0, \dots, 10$, obteve-se um sistema linear de $n+1$ incógnitas e $n+1$ equações, cuja a solução foi obtida pelo Método de Eliminação de Gauss. A solução do sistema representa a solução numérica da EDP (4) sujeita as condições de contorno. A Tabela I apresenta a solução numérica e a solução analítica da EDP (4) para verificação e validação do Método.

Tabela I: Comparação entre as soluções numérica e analítica

x	Solução Análítica	Solução Numérica (mm)	Erro Absoluto
0,1	-0,0337956259	-0,02161293596	0,01218268994
0,2	-0,060625396	-0,0376013886	0,0230240074
0,3	-0,0798854549	-0,0484176016	0,0314678533
0,4	-0,0911958053	-0,05442358458	0,03677222072
0,5	-0,0944090829	-0,04670345768	0,04770562522
0,6	-0,0896133769	-0,05304984103	0,03656353587
0,7	-0,0771290301	-0,04600713719	0,03112189291
0,8	-0,0574995039	-0,03483430357	0,02266520033
0,9	-0,03147654103	-0,01952464172	0,01195189931

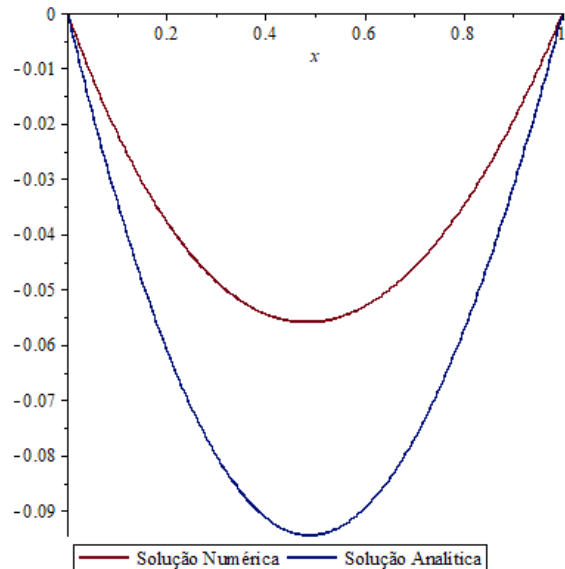


Figura 2: Gráfico comparativo entre solução numérica e analítica

III. CONCLUSÃO

A solução numérica obtida foi satisfatória, pois os valores obtidos foram próximos aos valores da solução analítica como mostrados na Tabela I, assim sendo, comprova-se a efetividade do Método de *Rayleigh-Ritz*.

REFERÊNCIAS

- [1] R. L. Burden and J. D. Faires, *Análise Numérica*, *Pioneira Thomson Learning*, São Paulo, 2003.

A Figura 2 apresenta o gráfico da solução numérica e analítica.