



**Simpósio de Métodos
Numéricos em Engenharia**

25 a 27 de outubro, 2017

Estudo Comparativo de Placa e Viga Apoiadas sobre Base Elástica utilizando Elementos Finitos

Com ênfase em pavimentos aeroportuários

Rezende C. W. A., Vicentini D. F., Arndt M.

PPGECC

Universidade Federal do Paraná - UFPR

Curitiba, Brasil

cw.rezend@gmail.com, vicentini@ufpr.br, arndt@ufpr.br

Resumo: Este trabalho apresenta um estudo comparativo entre uma placa e uma viga, ambas apoiadas sobre uma base elástica com carregamento uniformemente distribuído, com o intuito de simplificar o problema bidimensional para unidimensional, com ênfase em pavimentos aeroportuários. Neste estudo são analisados os deslocamentos dos dois elementos estruturais, no entanto, os deslocamentos do sistema unidimensional, a viga, é desenvolvido com o auxílio de uma ferramenta computacional, *software Maple*[®], utilizando o método dos elementos finitos e comparado com os resultados obtidos por Paccola (2001) no trabalho desenvolvido com placas multicamadas apoiadas sobre base elástica.

Palavras Chaves: *Elementos finitos; base elástica; elemento unidimensional; pavimento aeroportuário; Software Maple*[®].

I. INTRODUÇÃO

Desde suas origens, no final dos anos 20 até os dias atuais, o transporte aéreo tem sofrido grandes mudanças tecnológicas que impactam diretamente na infraestrutura aeroportuária. Atualmente, a indústria aeronáutica tem estado atenta às exigências de ordem técnica, econômica, e ambientais cada vez maiores, podendo-se mencionar, como exemplo, o crescimento do tráfego aéreo, que tem desafiado a indústria a desenvolver novos produtos a fim de atender à demanda. Neste ano, por exemplo, o número de viagens nacionais e internacionais de passageiros no mundo aumentou 8,6% se comparado ao ano de 2015 [1].

Neste contexto, em meados dos anos 90 com o surgimento de aeronaves de grande porte, como o A380¹ – que é o maior

avião comercial do mundo voando hoje –, torna evidente reavaliar requisitos estruturais utilizados em pavimentos aeroportuários, uma vez que, são cada vez mais solicitados, tanto em termos de frequência quanto de cargas [2].

Com essa evolução, os estudos relacionados aos pavimentos aeroportuários utilizando o método dos elementos finitos para a compreensão e melhor entendimento do comportamento estrutural ficam cada vez maiores. Este trabalho, tem como objetivo apresentar um comparativo entre os elementos estruturais de placa e viga, ambas apoiadas sobre uma base elástica, com intuito de simplificar o problema de análise de deslocamentos bidimensional para unidimensional, e auxiliar em novos estudos de pavimentos aeroportuários, uma vez que boa parte dos pavimentos utilizados em aeroportos são analisados como placas, em especial a pista de taxiamento das aeronaves.

II. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A utilização de base elástica na análise de estruturas tem sido estudada por diversos pesquisadores para várias aplicações. Sendo assim, o emprego de base elástica em pavimentos aeroportuários pode ser também uma forma de analisar os pavimentos rígido e flexível, que são mais usuais nos aeroportos do mundo todo.

Existem estudos que levam em consideração as questões de base elástica, porém, alguns não tratam dessas considerações na modelagem para análise estrutural.

avião de passageiros em atividade hoje, com capacidade de transportar até 544 passageiros em uma configuração de quatro classes confortáveis e até 853 passageiros em uma configuração de classe única.

¹ Segundo a fabricante de aeronaves Airbus (2016), o modelo A380 é o maior

De acordo com a referência [3], em seu estudo de pavimentos aeroportuários as considerações e características de base elástica não foram adotadas para análise de impacto das cargas das aeronaves no instante do pouso.

Já a referência [4] apresenta considerações na modelagem do estudo de pavimento utilizando base elástica, uma vez que, esta análise se aproxima mais do sistema físico real e acaba proporcionando uma análise mais completa.

Segundo a referência [5], a pista de taxiamento do aeroporto Afonso Pena em Curitiba foi projetada e executada com as considerações de base elástica, ou seja, placas apoiadas diretamente sobre o solo.

Porém, para a utilização de uma base elástica, como apresentado neste trabalho, é necessário o conhecimento técnico e específico das características completas do solo. A análise do comportamento do solo com a estrutura é essencial para seu desempenho na prática da engenharia [6-7].

III. MATERIAIS E MÉTODOS

Para a realização desta análise comparativa entre uma placa e uma viga, ambas apoiadas sobre uma base elástica com carregamento uniformemente distribuído, será utilizado o método dos elementos finitos para análise unidimensional de uma estrutura de viga através do *software* Maple®.

Neste estudo, para efeito de análise não será levado em consideração os esforços reais que os pavimentos aeroportuários são submetidos e nem mesmo o efeito dinâmico de carga provocado pelo impacto da aeronave na pista de aeroporto. Portanto, o estudo em destaque tem a finalidade apenas de proporcionar uma referência de análise estrutural de deslocamentos provocado por uma determinada carga estática.

Será desenvolvido um exemplo numérico para que possa ser analisado e comparado com os resultados de deslocamentos do estudo realizado por Paccola em 2001 onde ele trabalhou a formulação de placas multi-camadas apoiadas sobre uma base elástica.

A. Placa

As placas são elementos estruturais planos que possuem duas de suas dimensões, largura e comprimento, muito maiores que sua espessura, ou seja, podendo ser classificada como “finas” ou até mesmo “espessas” [8].

De acordo com a referência [8], em sua análise foi utilizado uma placa apoiada sobre base elástica com duas bordas opostas apoiadas e as demais bordas sendo livres, com carregamento uniformemente distribuído, como mostram a Figuras 1 e 2, o qual a base elástica é considerada segundo as hipóteses de Winkler.

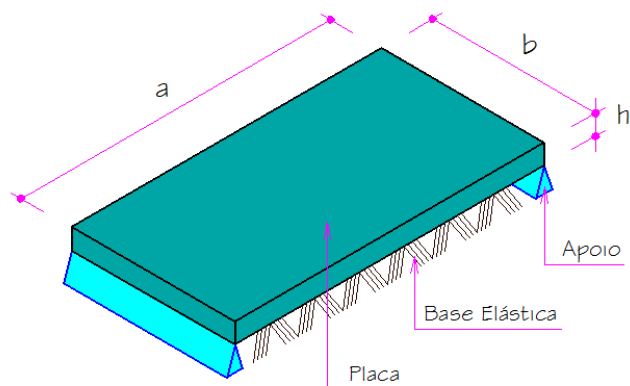


Fig. 1. Placa com vinculação e dimensões.
Fonte: Modificado do Paccola (2001).

As principais hipóteses utilizadas para o estudo de placas [8] foram as leis constitutivas de regime elástico linear; cinemática de pequenos deslocamentos e deformações; estado plano de tensões onde a tensão ao plano da placa sendo considerada como nula; parâmetros elásticos como o módulo de elasticidade longitudinal, coeficientes de poisson e módulo de elasticidade transversal; hipóteses de Reissner-Mindlin para placas espessas; e propriedades ortotrópicas em relação as duas direções para as camadas.

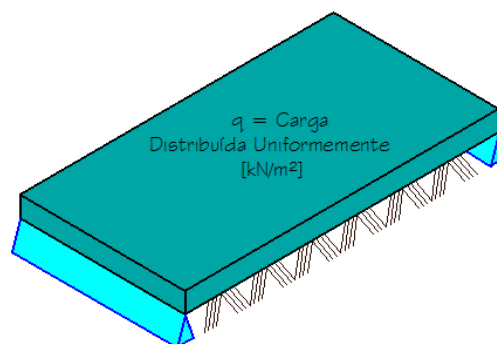


Fig. 2. Placa com carregamento uniformemente distribuído q.
Fonte: Modificado do Paccola (2001).

A base elástica tem sua contribuição na formulação teóricas das placas e foi levada em consideração no cálculo do princípio dos trabalhos virtuais [8].

Foram desenvolvidas dois tipos de formulação sendo uma para uma camada paralela ao plano horizontal yz (espessura e comprimento) e fibras na direção x (largura da placa), e outra para uma camada numa posição qualquer e fibras na direção de um determinado eixo. Com o problema apresentado é elaborado as equações de tensões, deformações e esforços solicitantes e assim apresentado ao princípio dos deslocamentos virtuais que rege o problema [8].

Porém, para uma análise bidimensional o funcional de energia potencial total [9-11] descrito em (1), com a condição de estacionaridade pode também ser representado na forma matricial, como mostra (2).

$$J(u) = \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon^T D \varepsilon + \sigma_0^T \varepsilon \right) dV - \int_V p^T u dV - \int_{S_q} \bar{q}^T u dS \quad (1)$$

$$\left(\int_V B^T D B dV \right) u^e = - \int_V B^T \sigma_0 dV + \int_V N^T p dV + \int_{S_q} N^T \bar{q} dS \quad (2)$$

Ou seja, a formulação teórica de método dos elementos finitos na solução de problemas de elasticidade plana e tridimensional acaba sendo mais complexa pelo fato de trabalhar com mais de um eixo direcional e, também, pela maioria das aplicações não terem uma solução analítica para um determinado problema e, sim, uma solução numérica [9-11].

Os dados utilizados para análise e cálculos dos deslocamentos de placas de multi-camadas apoiados sobre base elástica no trabalho desenvolvido pela referência [8] são apresentados na Tabela I.

TABELA I. DADOS GERAIS DA PLACA

| | |
|--|--|
| Módulo de Elasticidade | $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ |
| Módulo de Elasticidade Transversal | $G = 1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ |
| Espessura da Placa | $h = 0,1 \text{ m}$ |
| Carregamento Uniformemente Distribuído | $q = -5 \text{ kN/m}^2$ |
| Dimensões da Placa | $a = 10 \text{ m} \quad b = 1 \text{ m}$ |
| Coefficiente de Poisson | $\nu = 0$ |
| Constante Elástica do Solo | $k_{\text{solo}} = 8.000 \text{ kN/m}^3$ |

Fonte: Paccola (2001).

Segundo a referência [8], em seu estudo foram implementados no programa desenvolvido pelo próprio autor, funções de forma lineares e quadráticas, através de elementos quadriláteros de 4 nós, sendo funções lineares, porém, também foram empregados elementos de 8 e 9 nós, através de funções quadráticas, mostrado na Fig. 3.

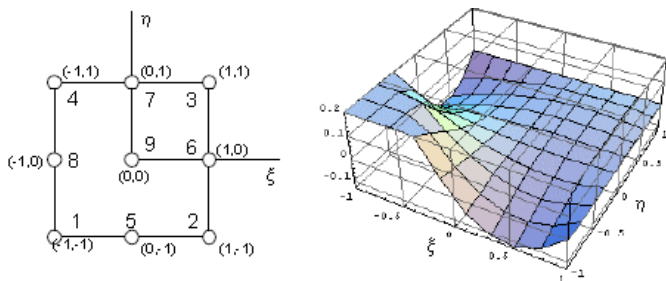


Fig. 3. Elemento mestre de 9 nós e função de forma do nó 1. Fonte: Adaptado do Paccola (2001).

Seu exemplo numérico realizado no estudo foi discretizado em uma malha de 10 x 10 elementos de 9 nós, como mostra a Fig. 4.

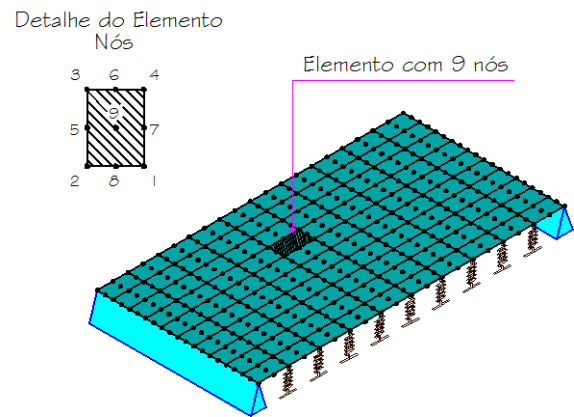


Fig. 4. Malha de elementos finitos discretizado por Paccola em 2001. Fonte: O autor (2016).

B. Viga

A viga definida para análise comparativa possui apoio sobre base elástica e as duas bordas opostas apoiadas, com carregamento uniformemente distribuído, como mostram as Figuras 5 e 6.

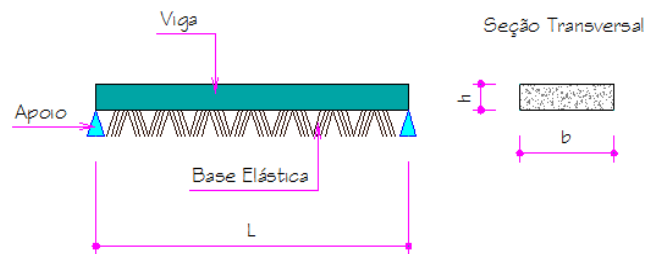


Fig. 5. Viga com vinculação e dimensões. Fonte: O autor (2016).

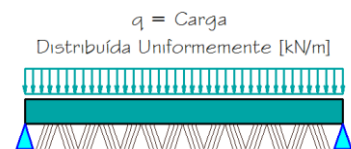


Fig. 6. Viga com carregamento uniformemente distribuído q. Fonte: O autor (2016).

Com base nos dados utilizados para realização da análise de placas multi-camadas apoiadas sobre base elástica [8], será utilizado neste trabalho uma viga com dados semelhantes, para que possa ser realizada a devida comparação e análise dos resultados obtidos, como mostra a Tabela II.

TABELA II. DADOS GERAIS DA VIGA.

| | |
|--|--|
| Módulo de Elasticidade | $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ |
| Módulo de Elasticidade Transversal | - |
| Espessura da Viga | $h = 0,1\text{m}$ |
| Carregamento Uniformemente Distribuído | $q = - 5 \text{ kN/m}$ |
| Dimensões da Viga | $L = 10\text{m}$ $b = 1\text{m}$ |
| Coefficiente de Poisson | $\nu = 0$ |
| Constante Elástica do Solo | $k_{\text{solo}} = 8.000 \text{ kN/m}$ |

Fonte: O autor (2016).

A montagem e discretização da viga para o cálculo dos deslocamentos utilizando o método dos elementos finitos é definido como um problema unidimensional, como mostra a Fig. 7, onde são considerados 4 deslocamentos nodais para cada elemento.

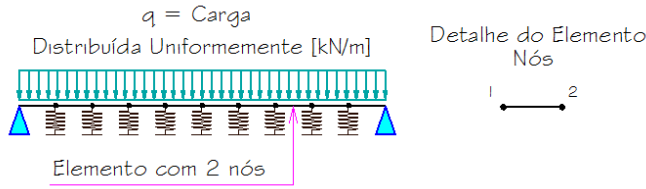


Fig. 7. Viga discretizada em 10 elementos finitos.
Fonte: O autor (2016).

As hipóteses básicas de Euler-Bernoulli são válidas, como, a existência de uma linha neutra onde não ocorre tração e nem compressão; as devidas seções que são planas e perpendiculares ao eixo longitudinal antes da deformação permanecem planas e indeformáveis no plano; o material é linear, homogêneo e elástico (Lei de Hooke); e as tensões normais σ_y e σ_z são muito pequenas quando comparadas com a tensão axial σ_x e, devido a isso, acabam sendo desprezadas [9-10].

A forma fraca da viga de Euler-Bernoulli utilizada para resolução deste problema é obtida através da forma forte utilizando Galerkin [10], o qual é apresentada por (3).

$$\int EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \int p w dx - \bar{Q} w \Big|_{\Gamma_r} + \bar{M} \frac{dw}{dx} \Big|_{\Gamma_r} \quad (3)$$

Porém, utilizando o princípio dos deslocamentos virtuais e tendo como hipóteses simplificadoras o carregamento quase estático, um sistema conservativo, pequenos deslocamentos e linearidade física, onde é válido o princípio da superposição dos efeitos, pode-se também aplicar o potencial de energia para obtenção dos deslocamentos da viga, como é mostrado em (4), que com a aplicação de Rayleigh-Ritz é obtido o funcional de energia potencial total para qualquer viga de Euler-Bernoulli [10-11], expresso por (5).

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \left(\{\sigma\}^T \{\varepsilon\} + 2\{\sigma_0\}^T \{\varepsilon\} \right) dV - \int_V \{b\}^T \{u\} dV - \int_S \{q\}^T \{u\} dS \quad (4)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - \int q v dx \quad (5)$$

Como a viga é discretizada em elementos de 4 deslocamentos nodais, a solução propositiva possui grau cúbico.

Segundo a referência [10], em elementos mais elaborados, é mais vantajoso realizar o mapeamento de um elemento para um sistema de coordenadas normalizadas e também um elemento no espaço físico de coordenadas cartesianas com o intuito de simplificar a análise.

Com a realização do mapeamento obtêm-se as funções de interpolação, também conhecida como funções de forma, mostradas em (6), (7), (8) e (9).

$$N_1 = \frac{1}{2} - \frac{3\xi}{4} + \frac{\xi^3}{4} \quad (6)$$

$$N_2 = \frac{L}{8} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \quad (7)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} + \frac{3\xi}{4} - \frac{\xi^3}{4} \quad (8)$$

$$N_4 = \frac{L}{8} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \quad (9)$$

Como citado anteriormente, através do desenvolvimento da forma fraca utilizando o método de Galerkin, a Equação (10) pode também ser representada matricialmente por (11) onde têm-se a matriz de rigidez elementar multiplicada pelo vetor elementar, que é igual ao vetor de força elementar.

$$\left[\int_{\Omega^e} EIBB^T dx \right] u^e = \int_{\Omega^e} p(x) N dx - \bar{Q} N \Big|_{\Gamma_r^e} + \bar{M} \frac{dN}{dx} \Big|_{\Gamma_r^e} \quad (10)$$

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \quad (11)$$

Com a Equação (11), os cálculos dos deslocamentos nodais aproximados podem ser encontrados e consequentemente comparados com os resultados obtidos por Paccola (2001) no estudo de placas.

IV. RESULTADOS OBTIDOS

Para a análise de placas desenvolvidas por Paccola (2001), os resultados referentes aos deslocamentos obtidos são mostrados no Deslocamento Vertical em metros nos nós da placa.

E no cálculo dos deslocamentos utilizando o *software* Maple® foi utilizado a matriz de rigidez elementar e o vetor de forças elementar apresentados por (12) e (13).

Já as condições de contorno essenciais utilizadas para realização dos cálculos e obtenção dos resultados são extremamente importantes, uma vez que, elas são caracterizadas a partir da geometria da estrutura com a finalidade de permitir algumas restrições para haver uma solução do sistema, no caso, obtenção dos deslocamentos.

As condições de contorno essenciais utilizadas neste trabalho foram aplicadas para deslocamentos nulos nos apoios situados nas extremidades da viga e considerações de apoios elásticos com molas para os apoios intermediários.

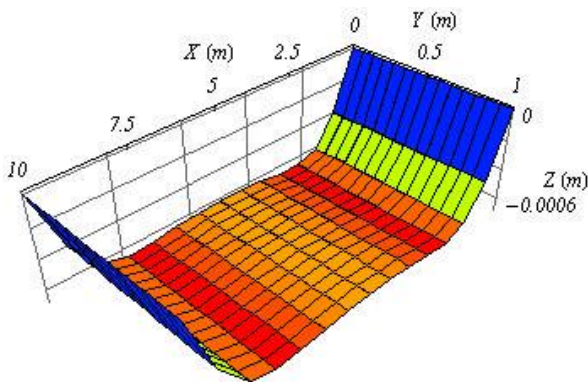


Fig. 8. Deslocamento vertical em metros nos nós da placa. Fonte: Paccola (2001).

$$\mathbf{K}^e = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{f}^e = \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{L}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{L}{6} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ -V_2 \\ -M_2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Com as matrizes de rigidez e os vetores de forças de cada elemento definidas realizou-se a montagem da matriz de rigidez e vetor de forças global não restringido. No entanto, como o problema necessita de condições de contorno essenciais para que haja uma solução, as demais foram impostas e o problema reorganizado de forma a obter os resultados de deslocamentos da viga, como mostra a Fig. 9.

Porém, com o intuito ainda de comparar os resultados obtidos pela análise dos deslocamentos utilizando uma malha com 10 elementos com o *software* Maple®, foi também desenvolvido uma malha com 20 elementos para critério de avaliação do refinamento utilizado.

São apresentados também a linha elástica de uma viga de 10m de comprimento com apoios fixos nas extremidades e apoios intermediários a cada 1m (Fig. 10).

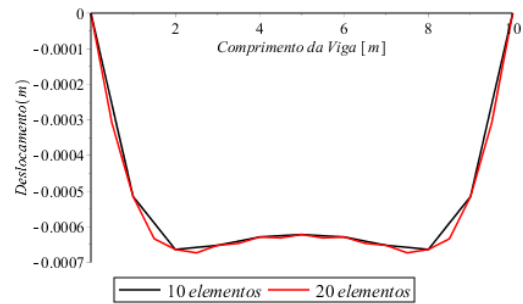


Fig. 9. Diagrama de deslocamentos [m] da viga com 10 elementos finitos (11 nós) e 20 elementos finitos (21 nós), contendo 2 graus de liberdade por nó, via *software* Maple®. Fonte: O autor (2016).

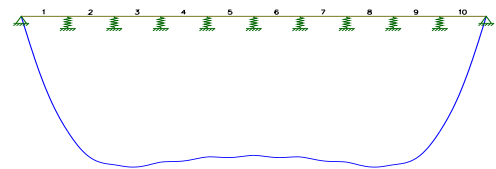


Fig. 10. Linha elástica de viga com apoio fixo nas extremidades e apoio intermediários de molas. Fonte: Ftool (2016).

TABELA III. DESLOCAMENTO VERTICAL NO MEIO DO VÃO (x = 5 M).

| | Paccola (2001) | Maple® (10 elementos) | Maple® (20 elementos) | Ftool (2016) |
|---------------------------|----------------|-----------------------|-----------------------|--------------|
| Deslocamento vertical (m) | -0,000621 | -0,000684 | -0,000673 | -0,000631 |

Fonte: O autor (2016).

V. CONCLUSÕES

A busca por simplificar problemas de placas de pavimentos aeroportuários com intuito de encontrar valores de deslocamentos mais próximos da realidade, utilizando o método dos elementos finitos, é o que este trabalho procurou desenvolver.

Para resolução de placas através de vigas, em pavimentos aeroportuários, as dimensões devem ser suficientemente necessárias, ou seja, devem ser praticamente vigas. O que exemplifica um modelo é de o comprimento ser muito maior que sua largura, pois assim a análise é válida.

Nota-se que para resolução dos deslocamentos de vigas apresentados nesse trabalho foi utilizado o refinamento de malha, ou seja, refinamento h . A viga em análise foi desenvolvida e calculada com uma malha de 10 elementos, porém, observa-se que com o aumento do refinamento para 20 elementos têm-se um melhor resultado de deslocamentos, onde a curva se aproxima mais da linha elástica, como mostra as Figuras 9 e 10.

A realização de um refinamento p também poderia ser uma solução para este problema, porém, não há a necessidade de aumentar o grau do polinômio propositivo devido aos resultados de deslocamentos serem exatos para o grau de polinômio cúbico, que foi adotado nesse trabalho.

Observou-se que neste trabalho que a análise comparativa foi limitada apenas para os deslocamentos, ou seja, para mais compreensão a outros fatores do comportamentos estrutural deverá ser realizado novos estudos.

REFERÊNCIAS

- [1] International Air Transport Association – IATA. February Demand Growth Stay Strong. Disponível em: <<http://www.iata.org/pressroom/pr/Pages/2016-04-07-01.aspx>>. Acesso em: 12 abril 2016.
- [2] Barros, A.G., Wirasinghe, S.C., “Designing the airport airside for the new large aircraft”. *Journal of Air Transport Management* 8, pp 121-127, 2002.
- [3] Leonardi, G., “Finite element analysis of airfield flexible pavement”. Department of Civil, Energy, Environmental and Materials Engineering, University of Reggio Calabria – Italy, 2014.
- [4] Buonsanti, M., Leonardi, G., “A finite element model to evaluate airport flexible pavements response under impact”. *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 138-139, pp. 257-262, 2011.
- [5] Schmid, Manfred Theodor. Dimensionamento de pavimentos aeroportuários. Curitiba, 2016. Entrevista em 14/04/2016.
- [6] Selvadurai, A. P. S., “Elastic analysis of soil-foundation interaction”. *Developments in Geotechnical Engineering*, Vol. 17, Chap. 2, Vol. 17. Department of Civil Engineering, Canada, 1979.
- [7] Selvadurai, A. P. S., “Elastic analysis of soil-foundation interaction”. *Developments in Geotechnical Engineering*, Vol. 17, Chap. 5, Vol. 17. Department of Civil Engineering, Canada, 1979.
- [8] Paccola, R. R., Menezes, F. A., Devloo, P. R. B., “Placas multi-camadas apoiadas sobre base-elástica”. 22nd Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Unicamp – Campinas, 2001.
- [9] Ardt, M., “Método dos Elementos Finitos I”. Disciplina trimestral do Programa de Pós-Graduação Engenharia de Construção Civil – Notas de Aula. Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba, 2016
- [10] Soriano, H. L., “Elementos Finitos - Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas”. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2009.
- [11] Ribeiro, F. L.B., “Introdução ao Método dos Elementos Finitos”. Programa de Engenharia Civil COPPE/UFRJ – Notas de Aulas. Rio de Janeiro, 2004.
- [12] SCHMID, Manfred Theodor. Dimensionamento de pavimentos aeroportuários. Curitiba, 2016. Entrevista realizada em 14/04/2016.