



**Simpósio de Métodos  
Numéricos em Engenharia**

**25 a 27 de outubro, 2017**

## *Maximização do valor associado à carga no empacotamento tridimensional*

Cleder Marcos Schenekemberg<sup>a, 1</sup>

Cassius Tadeu Scarpin<sup>a, b, 2</sup>

José Eduardo Pécora Junior<sup>a, b, 3</sup>

Deidson Vitorio Kurpel<sup>a, 4</sup>

Alexandre Checoli Choueiri<sup>a, 5</sup>

<sup>a</sup> Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia

<sup>b</sup> Departamento de Administração Geral e Aplicada

Universidade Federal do Paraná

Curitiba, Paraná, Brasil

<sup>1</sup> [cledercms@hotmail.com](mailto:cledercms@hotmail.com), <sup>2</sup> [cassiusts@gmail.com](mailto:cassiusts@gmail.com), <sup>3</sup> [pecora@ufpr.br](mailto:pecora@ufpr.br), <sup>4</sup> [kurpeld@gmail.com](mailto:kurpeld@gmail.com), <sup>5</sup> [alexandrechecoli@gmail.com](mailto:alexandrechecoli@gmail.com)

**Resumo** — Este trabalho aborda o problema de carregamento tridimensional de múltiplos contêineres, cujo objetivo é empacotar caixas ortogonalmente e sem sobreposição dentro de contêineres distintos, de modo a otimizar o valor associado à carga em um número limitado de contêineres. O presente artigo apresenta uma adaptação da heurística de George & Robinson para o caso de múltiplos contêineres, visando fornecer uma solução inicial para a resolução de uma formulação matemática do problema. Testes computacionais com instâncias da literatura foram efetuados por meio de um *software* de otimização. Os resultados obtidos mostram que a abordagem proposta neste trabalho é capaz de produzir soluções competitivas, obtendo padrões de carga ótimos e, em alguns conjuntos de testes, soluções melhores que as já conhecidas na literatura.

**Palavras-chave**—*carregamento de múltiplos contêineres; heurística construtiva; problemas de corte e empacotamento.*

### I. INTRODUÇÃO

O Problema de Carregamento de Contêineres (PCC) é classificado em Pesquisa Operacional como um caso particular dos Problemas de Corte e Empacotamento (PCE). Na resolução do PCC, caixas retangulares devem ser empacotadas ortogonalmente e sem sobreposição no interior de um dispositivo de carga, tais como trens, caminhões, navios e contêineres. O melhor uso do espaço interno dos dispositivos, chamados simplesmente de contêineres neste trabalho, pode reduzir substancialmente os custos de transporte, impactando o preço final dos produtos e o relacionamento entre compradores e revendedores.

De acordo com [1], o PCC pertence à classe de problemas combinatórios NP-Difícil e, em geral, não é possível encontrar soluções exatas dentro de um limite de tempo aceitável. Devido à complexidade destes problemas, grande parte das técnicas de resoluções propostas na literatura refere-se a métodos aproximados (metaheurísticas, heurísticas, algoritmos aproximativos, entre outros). Heurísticas baseadas em construção de camadas virtuais podem ser encontradas, por exemplo, em [1], [2] e [3].

Metaheurísticas podem ser obtidas em [4], [5] e [6]. Já métodos aproximativos foram utilizados, por exemplo, por [7] e [8].

Segundo [3], a heurística George & Robinson, originalmente proposta por [2], é conhecida pela sua simplicidade, flexibilidade e facilidade de implantação em situações reais, em relação aos outros métodos da literatura. Este procedimento heurístico é capaz de levar em consideração as restrições geométricas da carga, garantindo, assim, a não sobreposição dos itens em um único contêiner.

Técnicas exatas são pouco frequentes na literatura do PCC. Em [9], apresenta-se um algoritmo exato para o carregamento de um único contêiner, do qual derivam um método baseado em *Branch & Bound* para o carregamento de múltiplos contêineres. O trabalho de [10] apresenta um algoritmo de busca em profundidade e outro de programação dinâmica (ambos exatos) para resolver o problema de corte tridimensional restrito, de modo que apenas uma quantidade limitada de cada tipo de caixa está disponível para corte. Métodos exatos baseados em relaxações Lagrangeana e *Surrogate* são apresentados em [11] para resolver o problema de carregamento de paletes do produtor.

Formulações matemáticas para o PCC são fornecidas por [12] e [13]. O modelo de [12] considera o problema de carregamento de múltiplos contêineres (não idênticos), onde um subconjunto de contêineres deve ser selecionado para empacotar todas as caixas disponíveis. Já [13] aborda, por meio de um modelo de Programação Linear Inteira Binária, o problema de um único contêiner, cujo objetivo é maximizar a ocupação interna do dispositivo de carga. Este último modelo é capaz de considerar restrições práticas do PCC, como estabilidade vertical e horizontal da carga, múltiplos destinos, limite de peso dentro do contêiner e fragilidade dos itens.

O presente trabalho adapta o modelo de [13] para o caso de múltiplos contêineres heterogêneos, em que deseja-se escolher um subconjunto de itens, de modo a otimizar o valor total empacotado em um número limitado de contêineres. Uma heurística construtiva sequencial, obtida por meio de adaptações da abordagem de [2], é apresentada a fim de fornecer uma solução inicial para a resolução do problema.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: A presente Seção apresenta o problema de carregamento de múltiplos contêineres distintos. A Seção II descreve as adaptações feitas na heurística de [2], enquanto a Seção III detalha a formulação matemática para o problema. Os resultados dos testes computacionais são sumarizados na Seção IV. Por fim, na Seção V são feitas as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

## II. HEURÍSTICA SEQUENCIAL

A presente seção visa estender a heurística de [2] para considerar múltiplos contêineres heterogêneos. A abordagem original preenche um único contêiner dispondo

pilhas de caixas idênticas camada por camada ao longo do seu comprimento, até que não haja mais espaços disponíveis ou todas as caixas estejam empacotadas. Os autores estabelecem três critérios de seleção da caixa que deve abrir uma camada, da seguinte maneira:

- 1) Escolhe-se a caixa com a maior das menores dimensões.
- 2) Escolhe-se a caixa com a maior quantidade disponível.
- 3) Escolhe-se a caixa com a maior dimensão.

A justificativa do primeiro critério é que uma caixa com este comportamento pode ser difícil de arranjar no fim do carregamento, enquanto o segundo critério visa favorecer a construção de pilhas de caixas idênticas, acarretando frequentemente em um maior aproveitamento do espaço da camada. Já o último critério antecipa o empacotamento de caixas com dimensões desfavoráveis nas camadas iniciais. Os critérios de seleção devem ser aplicados na ordem que foram apresentados; no caso de empate, recorre-se ao próximo critério da lista. O comprimento da camada fica determinado pela primeira caixa nela colocada.

Como apresentado por [3], alguns refinamentos na heurística de [2] podem acarretar em uma maior ocupação do espaço interno do contêiner. Os autores fornecem dois novos critérios de seleção de caixas e um procedimento em forma de arranjo para considerar a ordem de seleção dos itens. Os critérios são:

- 4) Escolhe-se a caixa com o maior volume.
- 5) Escolhe-se a caixa com a maior razão dada por: maior dimensão/menor dimensão.

O quarto critério sugere que caixas mais volumosas favorecem no preenchimento de uma grande parte do espaço da camada, enquanto o quinto critério, com base em na razão estabelecida, aposta que caixas mais “desajeitadas” precisam ser carregadas no início do carregamento.

Uma nova variante da heurística, chamada versão arranjo, é apresentada por [3]. Esta versão toma arranjos de três dos cinco critérios de seleção ( $A_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 60$ ). A abordagem é executada 60 vezes em sequência, explorando todas as possibilidades de critérios dispostos três a três, de modo a escolher o melhor resultado gerado em termos de volume total empacotado.

Além dos critérios apresentados, pode-se escolher uma caixa para abrir uma camada da seguinte maneira:

- 6) Escolhe-se aleatoriamente uma caixa entre as disponíveis.
- 7) Escolhe-se um grupo aleatório de caixas entre as disponíveis.

O sexto critério define um único tipo de caixa entre todos os disponíveis para iniciar uma camada. Já no sétimo critério determina-se aleatoriamente uma quantidade de tipos que podem ser utilizados, gerando, assim, uma quantidade menor de possíveis itens a serem escolhidos nos passos seguintes. O fator randômico destes critérios é justificado pela natureza combinatória que o arranjo das dimensões das caixas pode assumir dentro do contêiner, permitindo que outros itens abram alguma camada.

Caso as caixas disponíveis possuam valor associado à carga, como o problema abordado neste trabalho, pode-se adotar os seguintes critérios de seleção:

8) Escolhe-se a caixa com maior valor associado.

9) Escolhe-se a caixa com maior produto dado por: valor associado  $\times$  volume da caixa.

Utilizando os nove critérios apresentados acima, obtém-se um total de 504 ( $A_{9,3} = \frac{9!}{6!} = 504$ ) heurísticas, que podem gerar padrões distintos de carga para um único contêiner. Com a aplicação do mesmo procedimento ao longo da largura do contêiner, chega-se a mais 504 heurísticas, que juntas totalizam 1.008 possibilidades de padrões de carga. A Fig. 1 ilustra a geração de camadas ao longo do comprimento e da largura do contêiner, respectivamente.

É comum na literatura adaptar heurísticas de um único contêiner para o caso de múltiplos contêineres; no trabalho de [14] é apresentada a seguinte estratégia sequencial:

**Enquanto** (há contêiner disponível) **e** (há caixa disponível) **Faça**

Escolha um contêiner;

Aplique a heurística de um único contêiner;

Remova as caixas empacotadas;

Atualize o número de contêineres disponíveis;

**Fim**

A abordagem utilizada neste trabalho considera as 1.008 heurísticas aplicadas ao longo do comprimento e da largura de cada contêiner. Resultados da literatura mostram que o método de [2] é capaz de gerar padrões de carga em um baixo tempo computacional, o que justifica a avaliação de todas estas possibilidades, permitindo, desta forma, escolher a melhor solução encontrada.

### III. MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA BINÁRIA

Considere  $c$  tipos de contêineres disponíveis para carregamento. Cada contêiner do tipo  $k$ , com  $k = 1, \dots, c$ , tem comprimento  $L_k$ , largura  $W_k$ , altura  $H_k$  e disponibilidade  $d_k$ , pode ser carregado com  $m$  tipos distintos de caixas. Cada caixa do tipo  $i$ , com  $i = 1, \dots, m$ , que pode ser alocada dentro de um contêiner do tipo  $k$ , tem comprimento  $l_i$ , largura  $w_i$ , altura  $h_i$  e volume (ou valor associado à caixa)  $v_i$ . Existe um total de  $b_i$  caixas do tipo  $i$  que podem ser arranjadas nos contêineres.

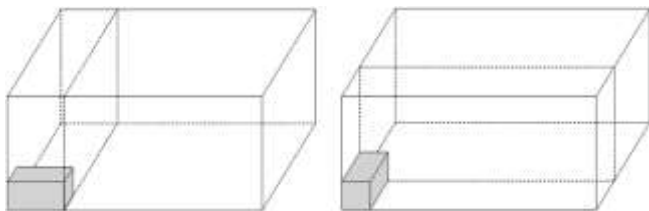


Figura 1. Camadas virtuais no comprimento e na largura de um contêiner, respectivamente. FONTE: O autor.

Considerando a orientação das caixas, o PCC é comumente classificado, segundo [15], em três tipos: orientação fixa, no qual as caixas não podem ser rotacionadas em torno dos seus eixos; no plano, isto é, as caixas possuem uma dimensão fixa, por exemplo, itens com informação do tipo “este lado para cima” e orientação geral, em que as caixas podem tomar até seis orientações distintas dentro de um contêiner.

O problema abordado neste trabalho é classificado como geral ou, em outras palavras, cada caixa pode rotacionar em torno de qualquer um dos seus eixos. Sendo assim, cada caixa do tipo  $i$  deve ser decomposta em novos itens com dimensões  $(l_i, w_i, h_i)$ ,  $(l_i, h_i, w_i)$ ,  $(w_i, l_i, h_i)$ ,  $(w_i, h_i, l_i)$ ,  $(h_i, l_i, w_i)$  e  $(h_i, w_i, l_i)$ , resultando em  $6m$  tipos distintos de caixas.

Tomando o sistema de coordenadas cartesiano, seja  $(p, q, r)$  o vértice inferior frontal esquerdo de uma caixa do tipo  $i$ , posicionada dentro de um contêiner do tipo  $k$  (Fig. 2). Em seu trabalho original, [13] utilizam padrões normais (ou combinações cônicas) para indicar os conjuntos das possíveis posições que uma caixa pode assumir dentro de um contêiner. Estes conjuntos, embora não possuam todas as possíveis coordenadas que uma caixa pode tomar em um contêiner, em geral, apresentam menores cardinalidade, e podem ser utilizados sem perda de generalidade. Para o PCC com múltiplos contêineres heterogêneos, os conjuntos definidos por [13] são adaptados da seguinte forma:

$$X_k = \{p \in \mathbb{Z} \mid p = \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot l_i, 0 \leq p \leq L_k - \min_i(l_i), 0 \leq \beta_i \leq b_i, \forall i\} \quad (1)$$

$$Y_k = \{q \in \mathbb{Z} \mid q = \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot w_i, 0 \leq q \leq W_k - \min_i(w_i), 0 \leq \beta_i \leq b_i, \forall i\} \quad (2)$$

$$Z_k = \{r \in \mathbb{Z} \mid r = \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot h_i, 0 \leq r \leq H_k - \min_i(h_i), 0 \leq \beta_i \leq b_i, \forall i\} \quad (3)$$

$$X_{ik} = \{p \in X_k \mid 0 \leq p \leq L_k - l_i, i = 1, \dots, m\} \quad (4)$$

$$Y_{ik} = \{q \in Y_k \mid 0 \leq q \leq W_k - w_i, i = 1, \dots, m\} \quad (5)$$

$$Z_{ik} = \{r \in Z_k \mid 0 \leq r \leq H_k - h_i, i = 1, \dots, m\} \quad (6)$$

Os conjuntos (1)-(3) indicam as posições que o vértice de uma caixa pode ocupar com seu canto inferior frontal esquerdo em relação às dimensões de um contêiner do tipo  $k$ . Já os conjuntos (4)-(6), definem as coordenadas que um item do tipo  $i$  pode assumir dentro de um contêiner do tipo  $k$ .

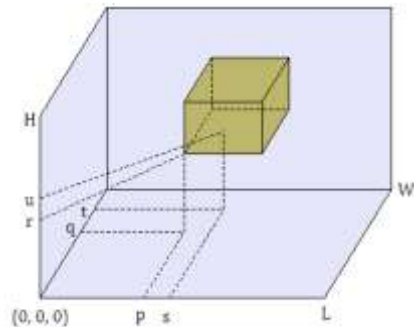


Figura 2. Caixa do tipo  $i$  no interior de um contêiner do tipo  $k$ , com seu vértice inferior frontal esquerdo no ponto  $(p, q, r)$  e um ponto  $(s, t, u)$  ocupado pelo interior da caixa. FONTE: Adaptado de [13].

As variáveis de decisão do modelo são binárias. Caso  $x_{ijkpqr}$  seja igual a 1, tem-se que uma caixa do tipo  $i$  possui seu vértice inferior frontal esquerdo no ponto  $(p, q, r)$  do  $j$ -ésimo contêiner do tipo  $k$ , caso contrário, a variável assume valor igual a 0.

A formulação matemática para o PCC com múltiplos contêineres heterogêneos, obtido como uma extensão do modelo apresentado por [13] para um único contêiner, é dado por:

$$\text{Maximizar } \sum_{k=1}^C \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{i=1}^{6m} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} v_i x_{ijkpqr} \quad (7)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{6m} \sum_{\{p \in X_{ik} \mid s-l_i+1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Y_{ik} \mid t-w_i+1 \leq q \leq t\}} \quad (8)$$

$$\sum_{\{r \in Z_{ik} \mid u-h_i+1 \leq r \leq u\}} x_{ijkpqr} \leq 1$$

$$\forall k = 1, \dots, C, \text{ e } j = 1, \dots, d_k$$

$$\sum_{k=1}^C \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{i=(6l-5)}^{6l} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} x_{ijkpqr} \leq b_i \quad (9)$$

$$\hat{l} = 1, \dots, m$$

$$x_{ijkpqr} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, 6m, \quad k = 1, \dots, C$$

$$j = 1, \dots, d_k, \quad p \in X_{ik}, \quad q \in Y_{ik}, \quad r \in Z_{ik} \quad (10)$$

$$s \in X_k, \quad t \in Y_k, \quad u \in Z_k$$

A função objetivo (7) visa maximizar o valor associado à carga (ou volume) das caixas empacotadas nos contêineres disponíveis. As restrições (8) evitam a sobreposição entre itens no interior do  $j$ -ésimo contêiner do tipo  $k$ , impedindo que qualquer ponto  $(s, t, u)$  no interior de uma caixa com vértice inferior frontal esquerdo no ponto  $(p, q, r)$  seja usado por outro item. As restrições (9) previnem que caixas do tipo  $i$  sejam empacotadas além da disponibilidade máxima, enquanto (10) apresenta o domínio das variáveis de decisão.

#### IV. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

A abordagem de resolução proposta neste trabalho foi implementada na linguagem de programação VB.net, e cada modelo matemático foi resolvido pelo *software* de otimização *Gurobi Optimizer* (versão 7.0.2), com parâmetros padrão. Os testes foram efetuados em um computador com sistema operacional *Microsoft Windows 10* (64 bit), com processador Intel Core™ i7-6500U CPU @ 1.60GHz e com 8GB RAM. Um limite de tempo de 3.600 segundos foi estabelecido para a execução dos testes.

Para uma avaliação comparativa, os testes foram realizados com os 16 conjuntos de dados apresentados por [16]. Os conjuntos possuem entre 2 e 3 tipos de contêineres, com disponibilidade variando de 2 a 15 unidades. Já quanto as caixas, existem no mínimo 2 e no máximo 6 tipos distintos, com disponibilidade que varia de 47 a 200 itens.

Dois abordagens foram consideradas na execução dos testes. A primeira, aqui chamada de “Abordagem1”, avalia apenas a resolução da formulação matemática por meio do *software Gurobi*. Já a segunda estratégia, chamada de “Abordagem2”, leva em consideração o melhor (maior valor associado à carga) padrão de carga fornecido pela heurística sequencial como uma solução inicial na resolução do modelo pelo *Gurobi*. A escolha do contêiner para ser preenchido pelo procedimento heurístico foi determinada aleatoriamente entre os contêineres disponíveis.

Na Tabela I são apresentados os resultados obtidos com as abordagens avaliadas, bem como os valores obtidos com os padrões de carga gerados pela Heurística Sequencial (HS), utilizadas como solução inicial durante a otimização. Em todos os conjuntos de testes o tempo computacional da heurística HS foi inferior a 1 segundo. As abordagens propostas foram capazes de gerar sete padrões de carga ótimos. Pode-se destacar que a Abordagem2 encontrou dois padrões de carga com valores maiores que a Abordagem1, sendo estes nos conjuntos 8 e 11, com acentuada diferença de valores no primeiro caso. Além disso, percebe-se que em todos os casos a Abordagem2 chegou à solução em tempo computacional menor ou similar quando comparada a Abordagem1. Devido a falta de memória computacional para gerar os modelos por meio do *Gurobi*, nenhuma solução foi alcançada para os conjuntos de testes 9 e 16. No entanto, pode-se assumir a solução obtida com a HS como padrão de carga nestes casos.

TABELA I: RESULTADOS DOS TESTES COMPUTACIONAIS

#	HS	Abordagem1			Abordagem2		
	Z	Z	gap	T(s)	Z	gap	T(s)
<b>M1</b>	7.680	9.216 <sup>*</sup>	0,00%	19,01	9.216 <sup>*</sup>	0,00%	16,39
<b>M2</b>	81.600	85.555,2 <sup>*</sup>	0,00%	12,42	85.555,2 <sup>*</sup>	0,00%	9,45
<b>M3</b>	51.812,50	53.262,5	0,44%	3.600	53.262,5	0,44%	3.600
<b>M4</b>	1.354.752	1.354.752 <sup>*</sup>	0,00%	1,02	1.354.752 <sup>*</sup>	0,00%	1,02
<b>M5</b>	513.750	583.750 <sup>*</sup>	0,00%	0,48	583.750 <sup>*</sup>	0,00%	0,50
<b>M6</b>	134.112	142.464	0,60%	3.600	142.464	0,60%	3.600
<b>M7</b>	16.143	17.616	1,87%	3.600	17.616	1,87%	3.600
<b>M8</b>	66.260,8	42.178,6	-	3.600	66.260,8	-	3.600
<b>M9</b>	125.316	-	-	-	-	-	-
<b>M10</b>	15.360	15.360 <sup>*</sup>	0,00%	0,88	15.360 <sup>*</sup>	0,00%	0,86
<b>M11</b>	47.159	54.669,6	2,65%	3.600	54.761	2,47%	3.600
<b>M12</b>	23.904	24.393,6	1,46%	3.600	24.393,6	1,46%	3.600
<b>M13</b>	36.556,8	36.556,8 <sup>*</sup>	0,00%	873,33	36.556,8 <sup>*</sup>	0,00%	137,99
<b>M14</b>	65.138,4	68.723,2	0,51%	3.600	68.723,2	0,51%	3.600
<b>M15</b>	36.492,6	40.807,8 <sup>*</sup>	0,00%	169,99	40.807,8 <sup>*</sup>	0,00%	162,49
<b>M16</b>	530.106	-	-	-	-	-	-

\* Padrão de carga ótimo

Os resultados da Abordagem2 foram comparados com as técnicas de resolução de [16] [17], [14], [6] e [18],

chamadas, na Tabela II, de MOH, BOR, ELE, TAK e REN, respectivamente. A Tabela II mostra o percentual de melhoria em relação a melhor solução conhecida (BKS), caso exista, da solução da Abordagem2 em relação aos métodos comparados. Destaca-se que a estratégia proposta foi capaz de gerar melhores soluções em sete conjuntos de dados e foi equivalente em outros cinco, ou seja, a abordagem mostra-se competitiva frente aos métodos de resolução existentes na literatura.

TABELA II: COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS PARA OS CONJUNTOS DE DADOS DE [16]

#	MOH	BOR	ELE	TAK	REN	Melhoria BKS
1	8.640	8.640	8.640	8.640	8.640	6,25%
2	83.494,40	85.120	85.376	84.224	85.376	0,21%
3	53.262,50	53.262,50	53.262,50	52.350	53.262,50	0,00%
4	2.333.440	2.333.440	2.307.840	2.333.440	2.333.440	NC
5	495.500	581.250	583.750	579.250	579.250	0,00%
6	138.240	139.584	141.216	137.952	139.968	0,88%
7	16.668	17.409	17.004	17.262	17.226	1,18%
8	65.741	68.645,60	69.121,20	69.747,20	71.236,40	-7,51%
9	119.772	128.952	133.632	128.556	130.860	-
10	15.360	15.360	15.360	15.360	15.360	0,00%
11	49.995	53.202,80	52.873,60	53.202,80	53.202,80	2,85%
12	23.529	24.235,20	23.673	23.990,40	23.990,40	0,65%
13	36.556,80	36.556,80	36.556,80	36.556,80	36.556,80	0,00%
14	56.492,80	65.316,80	68.723,20	68.723,20	68.723,20	0,00%
15	37.558,80	39.727,20	39.382,20	40.590	40.590	0,53%
16	556.458	595.770	591.535	571.290	603.000	-

NC: Não Comparável

Embora o resultado do conjunto de teste 4 apresenta um valor da função objetivo menor que as outras técnicas de resolução, o valor ótimo foi alcançado para este conjunto de dados. De acordo com o artigo de [16], este particular conjunto de dados possui um total de 10 contêineres, 5 com dimensões  $(L_1, W_1, H_1) = (60, 40, 72)$  e o restante com medidas  $(L_2, W_2, H_2) = (40, 36, 52)$ , totalizando 1.238.400 unidades de volume. Existem dois tipos de caixas: itens do tipo 1, com dimensões  $(l_1, w_1, h_1) = (36, 28, 24)$ , com valor associado à carga  $v_1 = 1.4$  e disponibilidade  $b_1 = 50$ , e itens do tipo 2, os quais possuem dimensões  $(l_2, w_2, h_2) = (40, 32, 20)$ , valor associado à carga  $v_2 = 1.0$  e disponibilidade  $b_2 = 60$ . Assumindo que todas as unidades de volume dos contêineres sejam ocupadas pela caixa do tipo 1, que possui o mais alto valor associado, o valor máximo da carga seria de 1.733.760. Sendo assim, não é possível obter padrões de carga com os valores apresentados pelos autores com os quais nossos resultados foram comparados.

A Fig. 3 ilustra o padrão de carga obtido para o conjunto de teste 12, com 34 caixas do tipo 1, 40 caixas do tipo 2 e 7 caixas do tipo 3. O seguinte esquema de cores foi adotado: itens do tipo 1 – cinza; itens do tipo 2 – azul e itens do tipo 3 – verde.

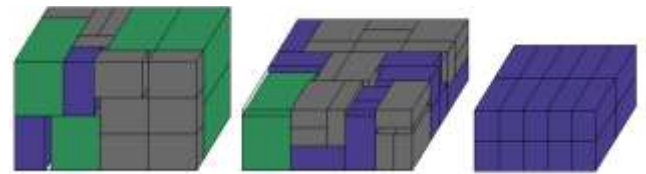


Figura 3. Padrão de carga obtido para o conjunto de teste 12. FONTE: O autor.

## V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentada uma abordagem de resolução para o PCC baseada em um modelo matemático combinado com um procedimento heurístico para geração de uma solução inicial, para abordar o problema de carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos. Este problema visa selecionar um subconjunto de itens de tal modo que o valor associado à carga seja maximizado. O *software Gurobi Optimizer* foi utilizado para efetuar testes computacionais com dados da literatura, de modo a avaliar a abordagem apresentada.

Os resultados dos testes efetuados mostram que a abordagem proposta é competitiva em relação aos métodos comparados neste trabalho, provando a otimalidade de sete conjuntos de dados e obtendo resultados equivalentes aos melhores resultados conhecidos da literatura em outros cinco conjuntos de testes.

O presente trabalho não levou em conta considerações práticas comumente encontradas em situações reais de problemas de empacotamento. Entretanto a abordagem proposta é capaz de considerar diversas destas restrições, como aquelas apresentadas por [13] para o problema de um único contêiner. A técnica apresentada neste artigo também pode ser estendida para abordar outros tipos de PCC's, como os problemas de minimização de bins e carregamento de paletes.

Sugere-se, em trabalhos futuros, o teste de outros critérios de abertura de camada para a heurística sequencial, assim como avaliar os efeitos da ordem de preenchimento dos contêineres. Quanto ao modelo, pode-se buscar formas alternativas na geração dos conjuntos dos possíveis vértices que uma caixa pode assumir dentro de um contêiner, o que pode impactar diretamente no número de variáveis e restrições da formulação matemática.

## REFERÊNCIAS

- [1] D. Pisinger, "Heuristics for the container loading problem," vol. 141, pp. 382–392, 2002.
- [2] J. A. George and D. F. Robinson, "A heuristic for packing boxes into a container," *Comput. Oper. Res.*, vol. 7, no. 3, pp. 147–156, 1980.
- [3] F. O. Cecilio and R. Morabito, "Refinamentos na heurística de George e Robinson para o problema do carregamento de caixas dentro de contêineres," *Transportes*, vol. 12, no. 1, pp. 32–45, 2004.

- [4] A. Bortfeldt and H. Gehring, "A hybrid genetic algorithm for the container loading problem," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 131, no. 1, pp. 143–161, 2001.
- [5] A. Moura and J. F. Oliveira, "A GRASP approach to the container-loading problem," *IEEE Intell. Syst.*, vol. 20, no. 4, pp. 50–57, Jul. 2005.
- [6] S. Takahara, "A Simple Meta-heuristic Approach for the Multiple Container Loading Problem," in *2006 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 2006, vol. 3, pp. 2328–2333.
- [7] F. K. Miyazawa and Y. Wakabayashi, "An algorithm for the three-dimensional packing problem with asymptotic performance analysis," *Algorithmica*, vol. 18, no. 1, pp. 122–144, May 1997.
- [8] F. K. Miyazawa and Y. Wakabayashi, "Approximation Algorithms for the Orthogonal Z-Oriented Three-Dimensional Packing Problem," *SIAM J. Comput.*, vol. 29, no. 3, pp. 1008–1029, 2000.
- [9] S. Martello, D. Pisinger, and D. Vigo, "The Three-Dimensional Bin Packing Problem," *Oper. Res.*, vol. 48, no. 2, pp. 256–267, 2000.
- [10] M. Hifi, "Exact algorithms for unconstrained three-dimensional cutting problems: A comparative study," *Comput. Oper. Res.*, vol. 31, no. 5, pp. 657–674, 2004.
- [11] L. K. de Oliveira and R. Morabito, "Métodos exatos baseados em relaxação lagrangiana e surrogate para o problema de carregamento de paletes do produtor," *Pesqui. Operacional*, vol. 26, pp. 403–432, 2006.
- [12] C. S. Chen, S. M. Lee, and Q. S. Shen, "An analytical model for the container loading problem," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 80, no. 1, pp. 68–76, 1995.
- [13] L. Junqueira, R. Morabito, and D. Sato Yamashita, "Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints," *Comput. Oper. Res.*, vol. 39, no. 1, pp. 74–85, Jan. 2012.
- [14] M. Eley, "A bottleneck assignment approach to the multiple container loading problem," *OR Spectr.*, vol. 25, no. 1, pp. 45–60, 2003.
- [15] A. Bortfeldt and G. Wäscher, "Constraints in container loading – A state-of-the-art review," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 229, no. 1, pp. 1–20, Aug. 2013.
- [16] B. B. Mohanty, K. Mathur, and N. J. Ivancic, "Value considerations in three-dimensional packing — A heuristic procedure using the fractional knapsack problem," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 74, no. 1, pp. 143–151, Apr. 1994.
- [17] A. Bortfeldt, "Eine Heuristik für Multiple Containerladeprobleme," *OR-Spektrum*, vol. 22, no. 2, pp. 239–261, May 2000.
- [18] J. Ren, Y. Tian, and T. Sawaragi, "A tree search method for the container loading problem with shipment priority," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 214, no. 3, pp. 526–535, 2011.