



**Simpósio de Métodos
Numéricos em Engenharia**

25 a 27 de outubro, 2017

Aplicação do Método dos Elementos Finitos na análise de flambagem de pórticos planos

Thiago Damasceno Silva
Universidade de Uberaba
Uberaba, Brasil
damasceno.tds@gmail.com

Resumo—Estruturas solicitadas por compressão estão sujeitas à perda de instabilidade por flambagem, sendo o caso de colunas, elementos comprimidos de treliças, pórticos e arcos. Dependendo da esbeltez da estrutura, a falha por flambagem pode ocorrer antes que o limite de resistência do material seja atingido. A partir da determinação da força crítica de flambagem é possível estabelecer o limite do esforço de compressão em relação ao equilíbrio estável da estrutura, sendo um procedimento necessário para a análise e o dimensionamento estrutural. Diversos métodos podem ser utilizados para o cálculo da força crítica de flambagem de estruturas, sendo o Método dos Elementos Finitos uma alternativa interessante por aproximar a resolução conforme um sistema de equações algébricas e não envolver equações diferenciais. Assim, nesse trabalho são determinados valores para a força crítica de flambagem em pórticos planos pelo Método dos Elementos Finitos, a partir da utilização do elemento de pórtico plano e formulação do problema de autovalor, sendo investigados quatro modelos estruturais. Constata-se que houve pequena variação nos valores obtidos conforme a análise numérica efetuada, logo a abordagem numérica utilizada pode ser ampliada para análise de outras estruturas.

Palavras-chave—flambagem; Método dos Elementos Finitos; pórticos planos.

I. INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos principais métodos numéricos utilizados para análise de problemas de engenharia, especialmente nos campos de

análise estrutural, escoamento de fluidos, transferência de calor e eletromagnetismo. No contexto da análise de estruturas reticuladas, geralmente os parâmetros investigados a partir do Método dos Elementos Finitos são deslocamentos e forças nodais. Outra possibilidade é a análise de flambagem de estruturas sujeitas à compressão, processo que consiste no cálculo de valores críticos para o carregamento aplicado e traçado dos possíveis modos de deformação relacionados a essa instabilidade.

A flambagem, considerada uma instabilidade elástica, pode ocorrer em diversas estruturas solicitadas por compressão, desde barras como colunas, pórticos e arcos, até elementos bidimensionais como placas e cascas. Dependendo da esbeltez da estrutura, a flambagem pode ocorrer antes que o limite de resistência ao escoamento ou à ruptura do material seja atingido. Por isso, é essencial que a força crítica de flambagem seja estimada. Sobretudo, é importante para que o limite do esforço de compressão seja estabelecido em relação ao equilíbrio estável da estrutura, influenciando o dimensionamento estrutural quanto ao estado limite último de compressão e flexocompressão.

A princípio, a análise da força crítica foi desenvolvida por meio da resolução da equação diferencial de equilíbrio, conforme indicado por [1]-[3] e outros autores em estabilidade estrutural. Contudo, dependendo do sistema estrutural a resolução da equação diferencial de equilíbrio pode ser muito trabalhosa, logo métodos numéricos são necessários para estimação da força crítica de flambagem. O Método dos Resíduos Ponderados e métodos matriciais,

como o Método dos Elementos Finitos, são procedimentos viáveis nesse contexto, conforme discutido por [4].

Dessa forma, nesse trabalho são determinados valores para a força crítica de flambagem em pórticos planos pelo Método dos Elementos Finitos, a partir da utilização do elemento de pórtico plano e formulação do problema de autovalor. São investigados quatro modelos estruturais, e os resultados obtidos são comparados a valores teóricos encontrados na literatura.

II. PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A matriz de rigidez linear k de um elemento de pórtico plano com 2 nós e 3 graus de liberdade em cada nó é indicada em (1). Os graus de liberdade referem-se a uma translação na direção paralela ao eixo do elemento, uma translação na direção perpendicular a esse eixo e uma rotação em relação ao eixo perpendicular ao plano do pórtico. Os coeficientes dessa matriz de rigidez podem ser obtidos conforme a aplicação de métodos como o Princípio dos Trabalhos Virtuais e o Método dos Resíduos Ponderados, considerando função de forma cúbica para representar os deslocamentos nodais do elemento [5]. A matriz de rigidez linear é quadrada e simétrica. As propriedades indicadas nos coeficientes da matriz são: comprimento do elemento (L), módulo de elasticidade longitudinal do material (E), área (A) e momento de inércia (I) da seção transversal.

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Em problemas envolvendo estabilidade estrutural, é preciso adotar outra matriz de rigidez, indicada em (2), denominada matriz de rigidez geométrica (k_g). O objetivo dessa matriz é considerar o efeito da força axial de compressão (P) na deformação do elemento de pórtico. Os coeficientes dessa matriz também podem ser obtidos por aproximação da equação de deslocamento usando funções de forma, sendo que o procedimento apresentado por [2] utiliza série de Taylor e parametriza os valores em função da força crítica de Euler. É importante notar que essa matriz é quadrada e simétrica, semelhante à matriz de rigidez linear.

$$k_g = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Para representar a direção de cada deslocamento do elemento que constitui o pórtico, transforma-se as coordenadas dos nós de locais para globais. Para tanto, é adotada a matriz de transformação de coordenadas apresentada em (3). A inclinação dos elementos é considerada em relação ao eixo horizontal, no sentido anti-horário, sendo θ o ângulo dessa inclinação.

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

As matrizes de rigidez linear e geométrica são adaptadas para a forma global segundo os produtos indicados em (4) e (5), respectivamente.

$$K = [T]^T \times [k] \times [T] \quad (4)$$

$$K_g = [T] \times [k_g] \times [T] \quad (5)$$

Para o sistema de pórtico, a montagem das matrizes de rigidez global, tanto linear (K) quanto geométrica (K_g), é desenvolvida a partir das matrizes de cada elemento isolado segundo a transformação da magnitude dos coeficientes. Quando duas barras possuem um nó em comum, os coeficientes relacionados a esse nó são somados na montagem das matrizes de rigidez global. Para o elemento de pórtico apresentado, que possui dois nós e três graus de liberdade em cada, a ordem da matriz de rigidez global é dada por três vezes o número de nós presentes no sistema estrutural.

Após a montagem das matrizes de rigidez conforme coordenadas globais, impõem-se as condições de contorno do sistema. Para a análise de flambagem, desconsideram-se as linhas e colunas referentes às coordenadas em que o deslocamento é nulo. Dessa forma, essas matrizes de rigidez são reduzidas de acordo com as condições de contorno, nas

coordenadas em que atuam. Por exemplo, matrizes de rigidez de ordem 12, relacionadas a um pórtico plano biengastado, passarão a ter ordem 6 devido às restrições geradas pelos engastes em dois nós. As demais dimensões são irrelevantes para o cálculo da força crítica de flambagem.

Considerando as hipóteses de pequenos deslocamentos e material com comportamento elástico-linear, a condição de rigidez do sistema é definida pela relação linear de (6), sendo Δ o vetor de deslocamentos e Q o vetor de ações. A rigidez total é a soma entre a rigidez linear e a rigidez geométrica.

$$\{[K]+[K_g]\}^{-1}\times[\Delta]=[Q] \quad (6)$$

Reescrevendo a expressão indicada em (6), tem-se a forma apresentada em (7).

$$[\Delta]=\{[K]+[K_g]\}^{-1}\times[Q] \quad (7)$$

Por definição, a força crítica de flambagem é a força axial que despreza a rigidez à flexão da estrutura, segundo [2]. Se a inversa da matriz de rigidez tornar-se infinitamente grande, então os deslocamentos também assumirão valores significantes, logo a condição anterior seria alcançada. A inversa de uma matriz pode ser obtida dividindo sua transposta pelo determinante, assim, se o determinante for zero a inversa da matriz de rigidez tenderá ao infinito. Por consequência, a força crítica pode ser obtida assumindo que o determinante da matriz de rigidez total será igual a zero, conforme (8).

$$\det\{[K]+[K_g]\}=0 \quad (8)$$

A força crítica de flambagem é o menor valor obtido para a força axial P na resolução do determinante da matriz de rigidez total. Esse procedimento é, conceitualmente, uma análise de autovalor.

III. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para análise da força crítica de flambagem em pórticos planos foram propostos quatro modelos estruturais, representados na Tabela I. Nessa tabela também são indicados os valores teóricos e os que foram calculados numericamente para a força crítica de flambagem (P_{cr}), além da diferença percentual entre ambos. Para manipulação matemática foi utilizado o programa computacional MATLAB R2015a.

O primeiro pórtico analisado, também conhecido como pórtico de Roorda, é um modelo composto por duas barras, uma disposta na horizontal e outra na vertical, que formam um “L”. O segundo modelo é um pórtico com duas barras verticais comprimidas e uma barra horizontal, sendo engastado nas bases e sem restrição lateral. O terceiro modelo de pórtico é semelhante ao anterior, porém, nesse

caso as bases são articuladas. O quarto modelo é semelhante ao segundo, mas nesse caso a deslocabilidade externa do pórtico é restringida. Em todos os modelos foram consideradas barras de mesmo material e mesma geometria, enquanto as propriedades adotadas para o cálculo numérico foram: $L = 350$ cm; $E = 2000$ kN/cm²; $A = 400$ cm²; $I = 13333,33$ cm⁴.

Para efetuar a análise de forma adimensional, segundo o parâmetro ρ , o valor da força crítica relativa a cada pórtico é dividido pela força crítica de Euler, P_e , referente a uma coluna biarticulada.

$$\rho = \frac{P_{cr}}{P_e} \quad (9)$$

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (10)$$

Conforme os resultados obtidos, notou-se que a variação da força crítica em relação valor teórico foi pequena. A maior diferença constatada foi de 6,29% em relação ao valor teórico, para o quarto modelo estrutural, caso de um pórtico biengastado sem deslocabilidade externa. A menor variação foi referente ao terceiro modelo, pórtico com as bases articuladas, que foi de apenas 0,64%. Portanto, é possível constatar que a metodologia empregada foi eficiente quanto à análise efetuada.

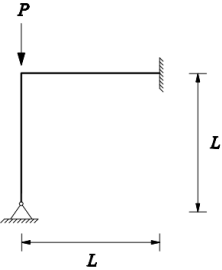
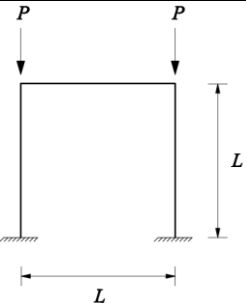
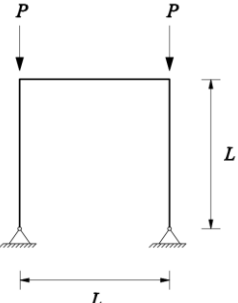
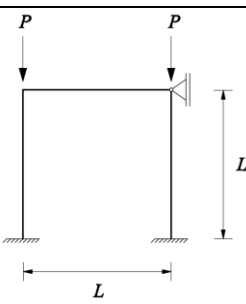
É interessante observar ainda que foi adotado apenas um elemento por barra na análise de flambagem dos pórticos planos. Assim, não foi necessário aumentar a quantidade de elementos para obter uma precisão aceitável em relação aos resultados teóricos. Análises efetuadas por programas computacionais comerciais, como o programa ANSYS por exemplo, geralmente necessitam de uma quantidade maior de elementos para que a força crítica de flambagem determinada seja relativamente precisa, dependendo do elemento finito empregado. Isso, infelizmente, pode induzir usuários ao erro se não forem testadas várias malhas.

IV. CONCLUSÃO

Nesse trabalho foram indicados procedimentos para aplicação do Método dos Elementos Finitos na análise da força crítica de flambagem em pórticos planos. Ao todo foram determinadas forças críticas para quatro modelos estruturais de pórtico plano, e constatou-se que os resultados obtidos conforme o procedimento matricial variou pouco em relação aos valores teóricos estabelecidos pelo método clássico, baseado na resolução de equações diferenciais. Além disso, notou-se que não foi preciso refinar a quantidade de elementos no sistema, pois apenas um elemento por barra foi suficiente para gerar resultados com precisão aceitável.

Dessa forma, conclui-se que os procedimentos admitidos segundo o Método dos Elementos Finitos possibilitam uma alternativa viável para esse tipo de análise, e certamente é oportuno sua extensão para análise de flambagem de outras estruturas reticuladas.

TABELA I: COMPARAÇÃO ENTRE VALORES TEÓRICOS E CALCULADOS

Modelo estrutural	Valor teórico	Valor calculado conforme MEF	Diferença percentual
<p>1</p> 	$P_{cr} = 14,7 \frac{EI}{L^2}$ $\rho = \frac{P_{cr}}{P_e} = 1,4894$	$\rho = 1,5474$	3,89%
<p>2</p> 	$P_{cr} = 7,34 \frac{EI}{L^2}$ $\rho = \frac{P_{cr}}{P_e} = 0,7437$	$\rho = 0,7295$	1,91%
<p>3</p> 	$P_{cr} = 1,82 \frac{EI}{L^2}$ $\rho = \frac{P_{cr}}{P_e} = 0,1844$	$\rho = 0,1832$	0,64%
<p>4</p> 	$P_{cr} = 25,2 \frac{EI}{L^2}$ $\rho = \frac{P_{cr}}{P_e} = 2,5533$	$\rho = 2,3935$	6,26%

REFERÊNCIAS

- [1] S. P. Timoshenko and J. M. Gere, Theory of elastic stability. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [2] Z. P. Bazant and L. Cedolin, "Structural stability: elastic, inelastic, fracture, and damage theories". New York: Oxford University Press, 1991.

- [3] A. Chajes, "Principles of Elastic Stability". New Jersey: Prentice Hall, 1974.
- [4] T. D. Silva, "Modelos para análise da força crítica de flambagem em arcos circulares". Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia 2016.
- [5] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, "The finite element method: the basis". 5. ed. Butterworth Heinemann, 2000.