



**Simpósio de Métodos
Numéricos em Engenharia**

25 a 27 de outubro, 2017

Problema de Dimensionamento de Lotes: uma Abordagem Multiobjetivo

Sander Joner

IFSC - Campus Jaraguá do Sul –Rau
Jaraguá do Sul, SC, Brasil
sander.joner@ifsc.edu.br

Neida Maria Patias Volpi

Joyce Rodrigues da Silva
UFPR - PPGMNE
Curitiba, PR, Brasil
neida@ufpr.br
joycee.07@gmail.com

Resumo—Este trabalho apresenta um modelo matemático para o problema de dimensionamento de lotes com estoques intermediários e teste de funcionalidade usando a abordagem de otimização multiobjetivo. Uma problema teste foi utilizado para analisar o *trade-off* entre custo de estoque intermediário e custo de operação do forno. A fronteira de eficiência das soluções não dominadas permite analisar os ganhos de uma função que representa os custos de estoque ao que se perde da função referente aos custos de operação do forno e vice-versa.

Palavras-chave: Dimensionamento de lotes; otimização multiobjetivo; modelo matemático.

I. INTRODUÇÃO

O Planejamento e Controle da Produção (PCP) têm por objetivo coordenar e administrar os recursos disponíveis e que são utilizados durante o processo de produção. A execução desse planejamento é estabelecida para três níveis hierárquicos: estratégico, tático e operacional. O nível estratégico envolve as decisões de longo prazo, definindo os objetivos mais gerais da empresa, sendo as decisões deste nível as que envolvem altos investimentos. O nível tático abrange as decisões de médio prazo e está vinculado com a utilização efetiva de recursos existentes, com o objetivo de cumprir as metas determinadas no planejamento estratégico,

definindo como irá acontecer a produção, por exemplo: quais produtos serão produzidos em um determinado período (dimensionamento de lotes). O nível operacional está relacionado ao dia-a-dia da produção (curto prazo), cujo objetivo é definir as prioridades do nível tático, por exemplo, quais as ordens de produção dos itens e quais as máquinas que serão utilizadas (programação da produção), entre outros.

Inspirados pela grande aplicabilidade dos problemas de dimensionamento de lotes da produção no nível operacional, neste trabalho será usado uma abordagem usando a otimização multiobjetivo para criar um modelo matemático para uma empresa multinacional do Sul do Brasil, fabricante de produtos eletro-eletrônicos, especificamente no processo de fabricação de inversores de frequência.

Na literatura alguns trabalhos abordam o problema de forma integrada aplicado a alguns setores industriais são eles: indústria de fundição [1], suplementos para nutrição animal [2], produção de papéis [3], refrigerantes [4]-[5], problemas multiestágios [6] e modelo matemático com sincronismo entre a produção e o teste de funcionalidade de itens [7], entre outros. Apesar de existir vários trabalhos nesta área a abordagem multiobjetivo é pouco explorada.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: apresentação do problema a ser estudado e abordagem multiobjetivo que será utilizada, o modelo matemático proposto, um pequeno teste de aplicação, análises dos resultados e por fim a conclusão.

II. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

O problema descrito é muito comum em outras empresas, sendo assim, apenas pequenas adaptações serão feitas no trabalho apresentado por [8], ele é apresentado aqui novamente de forma resumida.

Em um sistema produtivo, devem ser produzidos vários tipos de itens em um conjunto de máquinas num dado horizonte de planejamento. Em um intervalo de tempo, pode ser produzido mais de um tipo de item, desde que esta utilização não ultrapasse a capacidade de produção disponível. Entre a produção de lotes de tipos de itens diferentes em uma dada máquina, existe a necessidade de um tempo de preparação da mesma. Esses tempos de preparação, também chamados de tempos de *setup*.

Em sistemas produtivos compostos por máquinas distintas em paralelo, existe a possibilidade dos itens serem fabricados em várias máquinas. Nesses sistemas, a escolha da máquina para produção deve levar em consideração que máquinas distintas podem apresentar diferentes taxas de produção e níveis de eficiência e assim incorrer em custos de produção diferentes.

No problema que será abordado, após produzidos os itens nas M máquinas paralelas, esses são enviados a um setor de teste de funcionamento, denominado "Células de Teste", as quais são espécies de fornos que operam a uma temperatura elevada de modo a simular o funcionamento do produto em condições extremas, e que contam com conectores (slots) apropriados ao tipo de item que deve ser testado. Cada forno é ajustável a um grupo de itens. Um dos problemas encontrados, além do dimensionamento dos lotes na produção nas M máquinas paralelas, é o fato de tentar se trabalhar com as células teste (fornos) de forma que suas capacidades não sejam subutilizadas. Uma vez que uma célula de teste que tem capacidade para um número fixo de itens, começa a operar de forma a não estar completamente ocupada, o processo não pode ser interrompido por um tempo pré-determinado.

A espera por novos itens até a completa lotação do forno, implica no processo de resfriamento/aquecimento ou da manutenção da célula de teste aquecida durante um tempo, o que gera custos. Devido ao tempo para aquecimento da célula, é mais viável manter a célula sempre aquecida durante o horizonte de planejamento e desligá-la após não haver mais demanda.

Se não houver controle no processo de fabricação, pode-se incorrer tanto na falta de itens para completar espaços ociosos nas células de teste, bem como na produção demasiada de um determinado tipo de item em um mesmo período, o que gera estoque intermediário de itens não testados e conseqüentemente custos com estocagem e com acúmulo de itens gerando filas. Um dos objetivos para qual o modelo matemático será formulado é o de estabelecer um

controle dos estoques intermediários evitando filas em determinadas células e falta de itens em outras, e ainda limitar a quantidade de itens em estoque intermediário.

Observa-se que nem sempre é possível ou viável produzir uma quantidade que possa suprir a capacidade da célula de teste num tempo pré-determinado. Devido à busca pela minimização de custos, torna-se necessário sempre que possível, utilizar ao máximo a capacidade das células teste buscando atender às demandas previstas para o horizonte de planejamento. Este ambiente de produção é complexo, pois para atender as demandas previstas, com o menor custo possível, é preciso saber o quanto produzir, em qual momento e seqüência, controlar os estoques intermediários evitando filas para o teste de funcionalidade e ao mesmo tempo não deixando os fornos ociosos.

Existem conflitos associados às decisões de quantidades produzidas, custo de estocagem dos itens, preenchimento e operação dos fornos, o que justifica a utilizar a abordagem multiobjetivo. Esta análise será feita comparando o aumento dos custos do estoque intermediário com a diminuição do custo da operação dos fornos e vice-versa.

A. Abordagem Multiobjetivo

Um problema de otimização multiobjetivo, geralmente, consiste em minimizar (ou maximizar) simultaneamente um conjunto de critérios (objetivos) satisfazendo um conjunto de restrições. Em otimização multiobjetivo, não existe uma única solução que otimize cada um dos objetivos, mas sim um conjunto de soluções eficientes no qual nenhuma solução é melhor que outra solução para todos os objetivos. O decisor (*decisionmaker*) é o responsável pela escolha de uma solução eficiente particular que pondere os objetivos globais do problema.

Um problema geral de otimização multiobjetivo consiste em encontrar um vetor de variáveis de decisão (solução) que satisfaça restrições e otimize uma função vetorial cujos elementos representam as funções objetivos. Estas funções representam os critérios de otimalidade que, usualmente, são conflitantes. Portanto, o termo "otimizar" significa encontrar soluções com todos os valores dos objetivos que não podem ser melhorados simultaneamente.

Formalmente, isto pode ser definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)) \\ \text{Sujeito a } g(x) &= (g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x)) \leq b \\ x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \\ z &= (z_1, z_2, \dots, z_r) \in Z \end{aligned} \quad (P1)$$

onde, x é o vetor decisão, z é o vetor objetivo, X denota o espaço de decisões, e $Z = f(X)$ é a imagem de X denominada espaço objetivo.

As restrições $g(x) \leq b$, $b \in \mathbb{R}^p$ e o espaço X determinam o conjunto das soluções factíveis: $X^* = \{x \in X : g(x) \leq b\}$. Portanto, o problema (P1) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)) \\ \text{Sujeito a } & x \in X^* \end{aligned} \quad (\text{P2})$$

A imagem de X^* é denominado *espaço objetivo factível* e é denotada por $Z^* = f(X^*) = \{f(x) : x \in X^*\}$.

A imagem de uma solução $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^*$ no espaço objetivo é um ponto $z = (z_1, z_2, \dots, z_r) = f(x)$, tal que $z_j = f_j(x)$, $j = 1, \dots, r$. Na otimização de um único objetivo f , o espaço objetivo factível é *completamente ordenado*, o que significa que, dados quaisquer dois elementos $x, y \in X^*$ é sempre verdade que $f(x) \geq f(y)$ ou $f(x) \leq f(y)$. O objetivo é encontrar a solução (ou soluções) que forneça o mínimo (ou máximo) valor de f . No entanto, quando são considerados vários objetivos conflitantes em otimização multiobjetivo, não existe uma única solução que seja ótima com respeito a todos os objetivos. Por exemplo, em um problema de minimização, minimizar um dos objetivos pode causar o acréscimo de outros objetivos. O espaço objetivo, em geral, não é completamente ordenado, mas é *parcialmente ordenado* (Pareto, 1896). A ordenação parcial dos vetores objetivos é responsável pela distinção básica entre problemas de otimização multiobjetivos.

Dados quaisquer dois vetores de decisão $x, y \in X^*$, de acordo com a relação de preferência " \leq ", existem três possibilidades para seus correspondentes vetores objetivos:

$$f(x) \leq f(y), f(y) \leq f(x) \text{ ou } (f(x) \not\leq f(y) \text{ e } f(y) \not\leq f(x)). \quad (\text{I.1})$$

Em otimização mono-objetivo, a qualidade de uma solução aproximada é avaliada de uma maneira simples, fazendo-se a diferença relativa entre os valores da solução heurística e da solução ótima.

No entanto, em otimização multiobjetivo, a avaliação de aproximações do conjunto Pareto-ótimo não é tão trivial. Não existe uma medida simples e natural que seja capaz de capturar informação sobre a qualidade de um conjunto aproximado H em relação ao conjunto Pareto-ótimo (conjunto de referência R).

A referência [9] apresenta uma definição sobre uma solução ser eficiente (não dominada), ou ineficiente (dominada).

Definição 1: O ponto, $x^* \in X$, é eficiente (não dominado) se e somente se não existe outro ponto, $x \in X$, tal que $f_j(x) \leq f_j(x^*)$ com pelo menos um $f_i(x) < f_i(x^*)$, com $i \neq j$. Caso contrário, x^* é ineficiente, ou dominado.

Problemas multiobjetivo podem ser resolvidos através do método dos pesos, que consiste em representar o problema da forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= F(x) = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \dots + w_r f_r(x) \\ \text{Sujeito a } & x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \end{aligned} \quad (\text{P3})$$

Onde os w_i são chamados de pesos.

O problema multiobjetivo é então transformado em um problema mono-objetivo. A referência [10] mostra que a solução ótima de (P3) é uma solução não dominada se os pesos forem positivos.

Em muitos problemas reais de programação de tarefas, os analistas de produção defrontam-se com critérios de otimalidade conflitantes [11]. A maioria das pesquisas sobre problemas de programação de tarefas até a década de 70 concentrou-se na otimização de uma única medida de desempenho, tais como *makespan* (Cmax), fluxo total (F), atraso máximo (Tmax), atraso total (T) e número de tarefas atrasadas (nT). Cmax e F estão relacionadas, respectivamente, com a utilização máxima de recursos e com a minimização do estoque em processamento, e os outros critérios estão relacionados com a data de entrega das tarefas.

Nos anos 80, foram publicados alguns trabalhos sobre programação de tarefas multi-objetivo e resenhas destes foram escritas por [12] e [13].

A referência [14] mostra contribuições de desenvolvimentos de métodos heurísticos para problemas de otimização combinatória multiobjetivo. O objetivo dos métodos propostos é gerar, em tempo computacional aceitável, um conjunto de soluções dominantes próximo ao conjunto Pareto-ótimo, permitindo ao decisor (*decisionmaker*) a escolha de uma solução que satisfaça seus interesses.

Os métodos são testados no problema de programação de tarefas em um *flowshop* e no problema da mochila. Inicialmente, desenvolve-se uma heurística construtiva para gerar um conjunto de soluções dominantes do problema de *flowshop* multiobjetivo. Para obter conjuntos de soluções dominantes próximos aos conjuntos Pareto-ótimos, desenvolve-se uma heurística de busca local e duas metaheurísticas. A primeira é baseada em conceitos de Algoritmos Genéticos no qual usa-se fortemente o conceito de dominância de Pareto e combinam-se estratégias de elitismo, preservação de diversidade na população e busca local. A seguir, é proposto um método baseado em Busca Tabu na qual explora-se um conjunto de soluções em paralelo com o propósito de encontrar uma variedade de soluções distribuídas sobre toda a fronteira dominante. O desempenho dos métodos propostos é testado sobre uma variedade de instâncias do problema de *flowshop* multiobjetivo e do problema da mochila multiobjetivo.

A referência [15] apresenta um trabalho que trata da programação da produção de sistemas de manufatura *Job-shop* aplicando um algoritmo genético (AG) que envolve regras de despacho combinadas. São selecionadas as rotas que apresentem os menores tempos de produção e de setup, sem descuidar do prazo de entrega. O AG proposto atua em duas frentes de forma conjunta: seleção dos recursos disponíveis na célula de manufatura para compor a rota e a ordem de execução de cada processo, dentro da célula. Para tanto é utilizado um cromossomo composto de duas partes: cabeça e corpo. As rotas advêm da primeira estrutura combinadas com os índices de escolha dos recursos da segunda, refletem nos agendamentos. Testes envolvendo casos clássicos e realistas são promovidos com base na literatura. Nos casos clássicos é observado o desempenho do sistema frente ao agendamento, dado não

haver multiplicidade de rotas. Nos demais testes é observado o comportamento da proposta frente a situações com múltiplas rotas e quebras de recursos, bem como atrasos no início dos processos, alterações nos tempos de processamento e tempos dependentes do sequenciamento que está sendo adotado. Os resultados foram satisfatórios, observando-se que a proposta apresentada aproxima-se dos resultados ótimos para os problemas clássicos e, para os realistas, equiparou-se ou superou, segundo critérios de erro mínimo e tempo de processamento dos resultados da literatura, sob mesmas condições.

A referência [16] apresenta um problema de dimensionamento e sequenciamento integrados para uma fábrica de grande porte de cimento para refratário. Foram abordadas três formulações matemáticas: duas presentes na literatura e uma proposta como alternativa às já existentes. O objetivo foi comparar as formulações tanto em relação ao seu desempenho quanto à sua aplicabilidade como ferramenta de suporte à tomada de decisão. Uma dessas formulações utiliza variáveis contínuas e as outras são baseadas em variáveis indexadas no tempo. Estes modelos matemáticos abordam um conceito específico de como as variáveis e parâmetros são definidos, exigindo premissas e definições particulares para se adequar ao problema real. Afim de considerar os diferentes aspectos da situação prática, foram geradas várias instâncias a partir de distribuições uniformes, baseadas em informações reais.

A referência [17] trata do problema de sequenciamento e alocação de trabalhadores como objetivo de minimizar o número de trabalhadores e o tempo total gasto para executar todas as tarefas (*makespan*). Para tanto, propõem-se o uso de dois modelos diferentes de programação matemática e uma heurística VNS-Multiobjetivo baseada no método heurístico VNS. Como os objetivos são conflitantes entre si, os métodos propostos geram um conjunto de soluções eficientes, cabendo ao gestor escolher qual solução deve ser adotada.

III. MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático para o problema em estudo foi formulado a partir das ideias propostas no GLSPPL da referência [18] e no modelo apresentado pela referência [8].

Para resolver a problemática apresentada, foram modificadas algumas restrições ao GLSPPL de modo a minimizar o estoque intermediário existente entre a saída das máquinas paralelas e a entrada dos itens nos fornos de teste, e ainda para maximizar a carga de cada forno de teste.

A seguir é apresentado o modelo matemático do problema proposto.

Parâmetros:

- F : quantidade de células de teste (fornos).
- N : quantidade de itens;
- M : quantidade de máquinas;
- T : quantidade de períodos no horizonte de planejamento;

Índices:

- i : item ($i = 1, \dots, N$);

- l : máquina ($l = 1, \dots, M$);
- t : período de produção ($t = 1, \dots, T$);
- f : células de teste ou fornos ($f = 1, \dots, F$).

Dados:

- D_i : demanda do item i no final do horizonte de planejamento;
- st_i : tempo de *setup* para a produção do item i ;
- CP_{lt} : capacidade de produção disponível da máquina l no período t ;
- p_{il} : tempo de produção de uma unidade do item i na máquina l ;
- cs_i : custo de *setup* para produzir o item i ;
- h_i : custo de manutenção de uma unidade do item i não testado em estoque por período;
- $cfop_f$: custo de operação do forno f para a realização do teste de carga;
- SP_l : conjunto de itens que podem ser produzidos na máquina l ;
- CCT_f : ocupação máxima em área do forno f ;
- a_i : área ocupada pelo item i no forno f ;
- $CANT_t$: capacidade de armazenamento de itens não testados para cada período t ;

Variáveis de Decisão:

- q_{it} : quantidade do item i produzido no período t ;
- I_{it} : quantidade do item i não testado em estoque no final do período t ;
- qc_{it} : quantidade do item i que será enviado à célula teste dedicada a este item, no período t ;
- z_{ft} : igual a 1, se o forno f está sendo utilizado no período t ; e 0, caso contrário;
- qcf_{itf} : quantidade do item i que será enviado ao forno f no período t ;
- y_{itl} : igual a 1, se há *setup* do item i na máquina l no período t ; e 0, caso contrário;

As condições iniciais são representadas por:

- I_{i0} : quantidade de item i não testado no estoque intermediário, no período inicial;

Pesos:

- w_1, w_2, w_3 : são os pesos referentes ao *setup*, estoque e operação do forno, respectivamente.

Modelo matemático:

Nas equações (1) à (11) é apresentado o modelo matemático para o problema em estudo.

A função objetivo (1) representa a minimização dos custos variáveis com *setup*, estoque e custos de manutenção e de utilização do forno.

$$\min w_1 \cdot \sum_{l=1}^M \sum_{s=1}^W \sum_{i \in SP_l} \sum_{j \in SP_l} cs_i \cdot y_{itl} + w_2 \cdot \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N h_i \cdot I_{it} + w_3 \cdot \sum_{f=1}^F \sum_{t=1}^T cfover_f \cdot z_{ft} \quad (1)$$

A restrição (2) garante que a quantidade de horas consumidas na produção, adicionada da quantidade de horas necessárias para preparação da máquina, seja menor ou igual à capacidade disponível em cada máquina em cada período de tempo.

$$\sum_{i \in SP_l} p_{il} \cdot q_{il} + \sum_{i \in SP_l} st_i \cdot y_{itl} \leq CP_{lt} \quad \begin{matrix} l = 1, \dots, M; \\ t = 1, \dots, T \end{matrix} \quad (2)$$

A restrição (3) indica que somente haverá produção do item i no período t se a máquina estiver preparada para o item ($y_{itl} = 1$).

$$p_{il} \cdot q_{isl} \leq CP_{lt} \cdot y_{itl} \quad \begin{matrix} l = 1, \dots, M; i \in SP_l; \\ t = 1, \dots, T \end{matrix} \quad (3)$$

A restrição (4) realiza o balanço de estoques, relacionando quantidades produzidas, estoque intermediário de itens a serem testados com quantidade enviada para cada célula teste para cada item por período em todo o horizonte de planejamento.

$$I_{i,t-1} + \sum_{l=1}^M q_{il} - I_{it} = qc_{it} \quad \begin{matrix} t = 1, \dots, T \\ i \in SP_l \end{matrix} \quad (4)$$

A restrição (5) indica que a quantidade de itens enviados para a célula de teste deve ser no máximo a quantidade em estoque do item no período anterior.

$$qc_{it} \leq I_{i,t-1} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N; \\ t = 1, \dots, T \end{matrix} \quad (5)$$

A restrição (6) garante que a quantidade de itens não testados, que compõem o estoque intermediário, não exceda a capacidade de armazenamento de itens não testados depois de retirados os itens enviados aos fornos.

$$\sum_{i=1}^N I_{it} \leq CANT_t \quad t = 1, \dots, T \quad (6)$$

A restrição (7) determina que a quantidade do item i que será enviado a célula de teste no período t seja igual ao conjunto de todos os itens que serão enviados ao forno f no período t .

$$qc_{it} = \sum_{f=1}^F qc_{fitf} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N; \\ t = 1, \dots, T \end{matrix} \quad (7)$$

A restrição (8) indica que a quantidade máxima do item i que será enviado ao forno f no período t seja no máximo a ocupação em área do forno f .

$$\sum_{i=1}^N a_i \cdot qc_{fitf} \leq CCT_f \cdot z_{ft} \quad \begin{matrix} t = 1, \dots, T; \\ f = 1, \dots, F \end{matrix} \quad (8)$$

A restrição (9) determina que a quantidade total do item i que será enviada à célula de teste dedicada a este item em todos os períodos, deve ser pelo menos igual à demanda do item i estabelecida para o horizonte de planejamento.

$$\sum_{t=1}^T qc_{it} \geq D_i \quad i = 1, \dots, N \quad (9)$$

A restrição (10) indica que as variáveis y_{itl} e z_{ft} são binárias.

$$\begin{matrix} y_{itl} \in \{0,1\} \\ z_{ft} \in \{0,1\} \end{matrix} \quad \begin{matrix} l = 1, \dots, M; i \in SP_l; \\ f = 1, \dots, F; t = 1, \dots, T \end{matrix} \quad (10)$$

A restrição (11) indica que as variáveis q_{il} , qc_{it} , qc_{fitf} e I_{it} são inteiras não negativas.

$$\begin{matrix} q_{il}, qc_{it}, I_{it} \in Z^+; \\ i = 1, \dots, N; \end{matrix} \quad \begin{matrix} y_{itl} \geq 0 \\ t = 1, \dots, T; \end{matrix} \quad \begin{matrix} l = 1, \dots, M; \\ i \in SP_l \end{matrix} \quad (11)$$

IV. APLICAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

A aplicação do modelo foi realizada em um problema de pequeno porte. Como sugestão os custos utilizados na função objetivo poderão ser calculados usando a abordagem que será explicada a seguir.

O custo de *setup* é calculado usando o tempo que a máquina fica parada sem produção, para executar a preparação. Primeiro é identificado o tempo de *setup*, (tempo que a máquina não está produzindo). Depois é calculada a quantidade que a máquina poderia produzir caso não estivesse parada, e por último o valor médio de venda do item. Assim a fórmula para o cálculo do custo de *setup* é: (tempo do *setup*) x (quantidade produzida) x (valor médio do item).

O custo do estoque é proporcional à quantidade e o tempo que um item permanece em estoque. Ele pode ser calculado como (preço do item) x (ganho no mercado por período).

O custo de operação o do forno por período pode ser calculado da seguinte forma: (Consumo de kWh) x (Custo de kWh (industrial)).

Neste experimento os dados foram gerados aleatórios com o objetivo de validar o modelo. Considere a produção de 5 itens num horizonte de planejamento de 8 períodos. Têm-se disponíveis duas máquinas paralelas, dois fornos e o estoque inicial é zero para todos os itens. Na Tabela I, encontra-se os valores dos dados utilizados no experimento. O custo de operação do forno 1 é de 1000 unidades monetárias por período e a capacidade é de 10000 unidades de área. O forno 2 tem custo de 2000 unidades monetárias por período e capacidade de 20000 unidades de área. A capacidade do estoque é de 100 unidades e a capacidade de produção disponível em cada máquina e em qualquer período é de 60 unidades.

TABELA I: DADOS DO TESTE

Item:	Custo Setup (u.m.)	Custo Estoque (u.m.)	Área (u.a.)	Tempo Setup (u.t.)	Tempo Prod. (u.t.)	Demanda (unidades)
1	1	1	25	1	1	50
2	2	2	50	2	2	250
3	3	3	100	3	3	15
4	4	2	200	4	4	10
5	5	2	600	5	5	25

O modelo foi implementado e resolvido utilizando IBM ILOG CPLEX *Optimization Studio* 12.6 com interface OPL. Para execução do modelo foi utilizado um computador com processador *Intel Core i3*, 2,5GHz e 4Gb de memória RAM.

Primeiramente o modelo foi resolvido usando os pesos iguais. Assim, todos os objetivos teriam a mesma importância. A análise a ser feita é em relação às quantidades produzidas e os níveis de estoque. A segunda e terceira linhas da Tabela II representam as quantidades produzidas nas máquinas 1 e 2, respectivamente. A quarta linha representa os níveis de estoque intermediário.

TABELA II: RESOLUÇÃO DO EXPERIMENTO

	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8
M1	q ₁ =50	q ₂ =29	q ₂ =29	q ₂ =29	q ₅ =11	q ₂ =29	q ₂ =19	q _i =0
M2	q ₂ =29	q ₂ =28	q ₃ =15	q ₄ =10	q ₄ =11	q ₅ =11	q ₂ =29	q _i =0
Est.	I ₁ =50 I ₂ =29	I ₂ =58	I ₂ =57	I ₂ =29 I ₃ =15	I ₄ =10 I ₅ =11	I ₂ =29 I ₅ =11	I ₂ =48 I ₅ =3	I _i =0

O último período não houve produção nem estoque, pois os itens já foram finalizados anteriormente e enviados para o forno para atender a demanda final. A soma das quantidades produzidas é igual às demandas do horizonte de planejamento. A primeira análise é feita para verificar o bom funcionamento do modelo.

Para fazer a análise usando a otimização multiobjetivo, considere:

Função referente ao *setup*:

$$f_1 = \sum_{t=1}^M \sum_{s=1}^W \sum_{i \in SP_t} \sum_{j \in SP_t} cs_i \cdot y_{itl} \quad (12)$$

Função referente ao estoque:

$$f_2 = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N h_i \cdot I_{it} \quad (13)$$

Função referente à operação do forno:

$$f_3 = \sum_{f=1}^F \sum_{t=1}^T cfo_{operf} \cdot z_{ft} \quad (14)$$

É necessário fazer alguns testes para definir os domínios das funções (12), (13) e (14). Considere a Tabela III de pesos e a função objetivo é da forma:

$$\min w_1 f_1 + w_2 f_2 + w_3 f_3 \quad (15)$$

TABELA III: DOMÍNIO DAS FUNÇÕES

w ₁	w ₂	w ₃	f ₁	f ₂ (u.m.)	f ₃ (u.m.)
1	0	0	41	665	24000
0	1	0	41	1207	24000
0	0	1	62	1007,1	4000

Observando a primeira linha da Tabela III, quando tem-se w₁=1 e todos os outros w com valores iguais a zero, a função f₁ é a única que está ativa, ou seja, há somente a minimização de f₁. As outras funções não contribuem para a minimização total. Sendo assim o valor mínimo que f₁ pode assumir é 665. Assim f₂ e f₃ não contribuem para a função de minimização, pode-se assim observar um possível máximo que as duas funções podem assumir.

Na segunda linha da Tabela III, a função que está ativa na minimização é f₂, as outras funções têm pesos zero, portanto não contribuem, o valor mínimo de f₂ é de 41. Nesta linha também é possível observar um possível máximo para f₁ e f₃.

E por último na terceira linha da Tabela III, tem-se a minimização de f₃, lembrando que f₁ e f₂ têm pesos zeros, assim o valor mínimo que f₃ assume é de 4000.

Agora, pode-se definir os limitantes das três funções e fazer a normalização necessária. As funções pertencem aos seguintes intervalos: f₁ ∈ [665, 1207], f₂ ∈ [41, 62] e f₃ ∈ [4000, 24000].

A normalização é obtida utilizando o valor da função, o valor mínimo e o valor máximo que ela pode assumir, sendo calculada da seguinte forma:

$$\frac{f - \text{valor mínimo}}{\text{valor máximo} - \text{valor mínimo}} \quad (16)$$

Ressalta-se que para definir os pesos, não é uma tarefa fácil, pois muitas vezes as soluções encontradas são dominadas. Pois nem todas as variáveis são contínuas, como é o caso da variável y_{it} e z_{it} . Algumas variações nos valores dos pesos são feitas para identificar os objetivos que são confrontantes, somente às soluções com valores não dominados são apresentadas. Na Tabela IV é possível observar os pesos que foram utilizados para a criação da Figura I, nesta tabela os valores de f_1 , f_2 e f_3 não estão normalizados.

Observa-se a dificuldade para encontrar soluções não dominadas, foram encontrados apenas três pontos.

Nos dados da Tabela IV e na Figura I, já é possível identificar os objetivos confrontantes. Por exemplo, na Tabela IV analisando os valores de f_2 e f_3 , ao diminuir o custo de estoque há um aumento no custo de manutenção do forno e ao diminuir o custo de estoque há um aumento no custo de estoque. A Figura I também auxilia nesta interpretação.

TABELA IV: SOLUÇÕES NÃO DOMINADAS

w_1	w_2	w_3	f_1	f_2	f_3
1/3	1/3	1/3	41	665	7000
0,2	0,2	0,6	41	780,07	5000
0,15	0,15	0,7	41	882,07	4000

Observa-se na Figura I que para ter uma diminuição de 100 unidades no custo de estoque existe um aumento aproximado de 1000 unidades monetárias no custo de operação do forno considerando os custos dados. Através dessa análise, é possível verificar o *trade-off* entre custos de estoques e custos de operação de forno caso haja outro cenário de valores.

Quando a linha de produção estiver cheia, com isso os custos de estoques serão altos, porém o forno sempre estará perto de sua capacidade máxima, gerando assim um custo reduzido de operação.

Já quando os estoques estão em um nível mais baixo, o forno precisa ser ligado mais vezes, gerando assim um custo mais alto de operação.

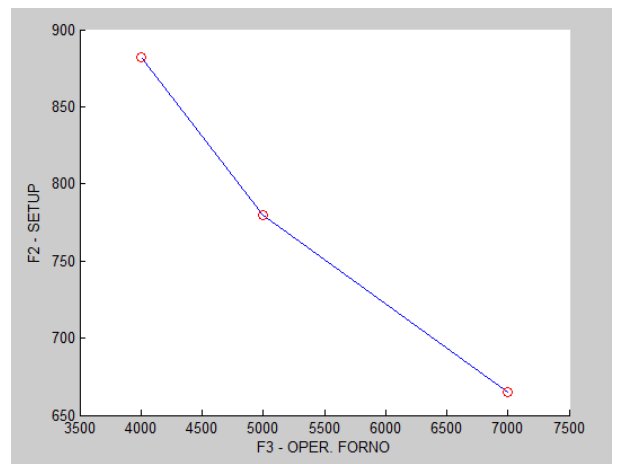


Figura I: Soluções não dominadas

V. CONCLUSÕES

A motivação desse trabalho foi interesse em apresentar um modelo matemático para o problema de dimensionamento de lotes para auxiliar nas tomadas de decisões de uma fábrica de inversores do Sul do Brasil. O modelo matemático proposto para o problema em estudo mostrou-se eficaz através de um pequeno cenário teste que foi criado.

REFERÊNCIAS

- [1] Araujo, S. A. de; Arenales, M. N.; Clark, A. R. "Dimensionamento de lotes e programação do forno numa fundição de pequeno porte." *Gestão & Produção, SciELO Brasil*, v. 11, p. 165–176, 2004.
- [2] Toso, E. A.; Morabito, R.; Clark, A. R. "Lot sizing and sequencing optimisation at an animal-feed plant." *Computers & Industrial Engineering, Elsevier*, v. 57, n. 3, p. 813–821, 2009.
- [3] Santos, M. O.; Almada-lobo, B. "Integrated pulp and paper mill planning and scheduling". *Computers & Industrial Engineering, Elsevier*, v. 63, n. 1, p. 1–12, 2012.
- [4] Ferreira, D. et al. "Single-stage formulations for synchronised two-stage lot sizing and scheduling in soft drink production." *International Journal of Production Economics, Elsevier*, v. 136, n. 2, p. 255–265, 2012.
- [5] Toledo, C. F. et al. "A memetic framework for solving the lot sizing and scheduling problem in soft drink plants." In: *Variants of Evolutionary Algorithms for Real-World Applications*. [S.l.]: Springer, 2012.
- [6] Ulbricht, G. "Um modelo de planejamento da produção multiestágio com estoque intermediários limitados." Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2015.
- [7] Joner, S.; Volpi, N. M. P. "Proposta de um modelo matemático para a produção e teste de funcionalidade em ambiente de máquinas." *Interciencia: Revista de ciencia y tecnología de América, Asociación Interciencia*, v. 42, n. 1, p. 33–38, 2017.
- [8] Joner, S. "Proposta de modelo matemático para a produção e teste de funcionalidade em ambiente de máquinas." Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2017.
- [9] Steuer, R.E., "Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application". Malabar: Robert E. Krieger Publishing, 1989.

- [10] Goicoechea, A.; Hansen, D.R.; Duckstein, L. 1982: "Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications". New York: John Wiley and Sons.
- [11] Panwalkar, S.; Dudek, R.; Smith, M. "Sequencing research and the industrial scheduling problem." In: SPRINGER. Symposium on the Theory of Scheduling and its Applications. [S.l.], 1973. p. 29–38.
- [12] Dileepan, P.; Sen, T. "Bicriterion static scheduling research for a single machine." *Omega*, Elsevier, v. 16, n. 1, p. 53–59, 1988.
- [13] Fry, T.; Armstrong, R.; Lewis, H. "A framework for single machine multiple objective sequencing research". *Omega*, Elsevier, v. 17, n. 6, p. 595–607, 1989.
- [14] Arroyo, J. E. C. et al. "Heurísticas e metaheurísticas para otimização combinatória multiobjetivo". [sn], 2002.
- [15] Branco, R. M. et al. "Agendamento de tarefas em sistemas de manufatura job-shop realista com demanda por encomenda: solução por algoritmo genético". 2010.
- [16] Alves, F. d. F. et al. "Integrated lot sizing and production scheduling formulations: an application in a refractory cement industry." *Gestão & Produção, SciELO Brasil*, v. 23, n. 1, p. 204–218, 2016.
- [17] Júnior, G. P. "A multi-objective approach to the scheduling problem with workers allocation." *Gestão & Produção, SciELO Brasil*, v. 23, n. 1, p. 132–145, 2016.
- [18] Meyr, H. "Simultaneous lotsizing and scheduling on parallel machines." *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 139, n. 2, p. 277–292, 2002.