



**Simpósio de Métodos
Numéricos em Engenharia**

25 a 27 de outubro, 2017

Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Equação Bidimensional do Telégrafo com Solução Fundamental Independente do Tempo

1º Maurício Dolinski Barddal
Universidade Federal do Paraná
PPGMNE
Curitiba, Paraná
mauricio.barddal@gmail.com

2º José Antonio Marques Carrer
Universidade Federal do Paraná
PPGMNE
Curitiba, Paraná
carrerj@gmail.com

Resumo—Neste estudo, apresenta-se a solução numérica da equação bidimensional do telégrafo através do método dos elementos de contorno, fazendo uso da solução da equação de Laplace como solução fundamental. O MEC fará com que a equação diferencial seja transformada em uma equação integral que relaciona valores do contorno. Essa equação integral será composta por integrais referentes ao contorno, impondo a necessidade de sua discretização através de elementos. Esses, dentre as variações mais utilizadas, serão do tipo linear. A equação integral também possui integrais referentes ao domínio, fazendo com que haja a discretização do mesmo através de células triangulares lineares. As derivadas temporais, de primeira e segunda ordem, serão aproximadas pelo esquema de diferenças finitas e pelo método de Houbolt.

Index Terms—Método dos Elementos de Contorno, Equação do Telégrafo, Condição Inicial

I. INTRODUÇÃO

A equação do telégrafo foi proposta inicialmente por Oliver Heaviside em 1880, modelando a corrente elétrica ou a voltagem através de um fio condutor. Essa equação também pode modelar outros fenômenos, como o movimento randômico de uma partícula sobre um plano limitado, proposto por [1] e a propagação de ondas eletromagnéticas através da ionosfera terrestre, por [2]. As aplicações se estendem também para área da biologia, com o estudo de movimento unidimensional de insetos, assim como o fluxo sanguíneo através das artérias, [3].

Neste trabalho, a equação bidimensional do telégrafo será resolvida numericamente através do método de elementos de contorno. A equação inicialmente será tratada por resíduos ponderados, tanto para o domínio quanto para o contorno. Após aplicada a identidade de Green, as funções pesos, provindas dos resíduos ponderados, terão seus valores devidamente escolhidos de tal forma que a equação se torne mais simplificada. Sequencialmente, a solução da equação de Laplace será utilizada como solução fundamental do problema, sendo interpretada como o efeito em um ponto campo (x, y) , de um Delta de Dirac aplicado em um ponto fonte ξ . Após o uso da propriedade do Delta de Dirac e o tratamento da equação para pontos pertencentes ao contorno, é obtida a equação básica do método dos elementos de contorno. Efetuando a discretização do contorno por elementos lineares e a discretização do domínio por células triangulares lineares, teremos a equação como uma soma de integrais sobre elementos e células para todos os nós pertencentes ao contorno e ao domínio (pontos internos). Por fim, serão geradas duas formulações, a primeira (MEC-D) fará uso de diferenças finitas para as derivadas de primeira e segunda ordem, e a segunda formulação (MEC-H), utiliza o método de Houbolt para ambas as derivadas. A eficácia das formulações será analisada para dois exemplos sobre domínios bidimensionais de formato retangular para determinados instantes de tempo.

II. EQUAÇÃO DO TELÉGRAFO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Seja a equação do telégrafo em duas dimensões:

$$\nabla^2 \mu + g(x, y, t) = \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial \mu}{\partial t} + \beta^2 \mu \quad , \quad (1)$$

cujos domínio bidimensional será representado por Ω , ou ainda, $(x, y) \in \Omega$. Os valores α e β são constantes positivas.

As condições de contorno essenciais ou Dirichlet são aplicadas em Γ_μ :

$$\mu(x, y, t) = \bar{\mu}(x, y, t) \quad (x, y) \in \Gamma_\mu \quad (2)$$

As condições de contorno naturais ou de Newmann são aplicadas em Γ_q :

$$q(x, y, t) = \frac{\partial \mu(x, y, t)}{\partial \eta} = \bar{q}(x, y, t) \quad (x, y) \in \Gamma_q \quad (3)$$

com Γ_μ e Γ_q partes constituintes do contorno, de tal forma que $\Gamma = \Gamma_\mu \cup \Gamma_q$.

Admite-se que $\mu(x, y, t)$ seja uma solução aproximada do problema; conseqüentemente teremos resíduos para o domínio e para o contorno. Assim, a sentença para resíduos ponderados pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \mu) \omega_1 d\Omega + \int_{\Omega} b \omega_1 d\Omega + \int_{\Gamma_\mu} [\mu - \bar{\mu}] \omega_2 d\Gamma + \int_{\Gamma_q} [q - \bar{q}] \omega_3 d\Gamma = 0 \quad (4)$$

sendo ω_1, ω_2 e ω_3 , funções de ponderação, e ainda:

$$b = b(x, y, t) = \left[g(x, y, t) - \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial \mu}{\partial t} + \beta^2 \mu \right) \right] \quad (5)$$

A primeira integral de domínio pertencente à (4), pode ser vista como a segunda identidade de Green:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \mu) \omega_1 d\Omega = \int_{\Gamma} q \omega_1 d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta} \mu d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla^2 \omega_1) \mu d\Omega \quad (6)$$

Reescrevendo (4), separando as integrais referentes ao contorno através da subtração de duas integrais, e substituindo a primeira integral de domínio pela igualdade (6), obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \omega_1) \mu d\Omega + \int_{\Omega} b \omega_1 d\Omega + \int_{\Gamma} q \omega_1 d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta} \mu d\Gamma + \int_{\Gamma_\mu} \mu \omega_2 d\Gamma - \int_{\Gamma_\mu} \bar{\mu} \omega_2 d\Gamma + \int_{\Gamma_q} q \omega_3 d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \omega_3 d\Gamma = 0 \quad (7)$$

lembrando que $\Gamma = \Gamma_\mu \cup \Gamma_q$, (7) torna-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \omega_1) \mu d\Omega + \int_{\Omega} b \omega_1 d\Omega + \int_{\Gamma_\mu} q \omega_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_q} q \omega_1 d\Gamma - \int_{\Gamma_\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta} \mu d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta} \mu d\Gamma + \int_{\Gamma_\mu} \mu \omega_2 d\Gamma - \int_{\Gamma_\mu} \bar{\mu} \omega_2 d\Gamma + \int_{\Gamma_q} q \omega_3 d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \omega_3 d\Gamma = 0 \quad (8)$$

Considerando as funções de ponderação para os seguintes valores: $\omega_2 = \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta}$ e $\omega_3 = -\omega_1$, e agrupando os termos semelhantes, (8) ficará:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \omega_1) \mu d\Omega + \int_{\Omega} b \omega_1 d\Omega + \left[\int_{\Gamma_\mu} q \omega_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{q} \omega_1 d\Gamma \right] - \left[\int_{\Gamma_\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta} \bar{\mu} d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta} \mu d\Gamma \right] = 0 \quad (9)$$

Fazendo, $\mu = \bar{\mu}$ e $q = \bar{q}$, (9) torna-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \omega_1) \mu d\Omega + \int_{\Omega} b \omega_1 d\Omega + \int_{\Gamma} q \omega_1 d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta} \mu d\Gamma = 0 \quad (10)$$

Para a equação:

$$\nabla^2 \omega_1(\xi, x, y) = -\delta(\xi, x, y) \quad (11)$$

tem-se a solução fundamental:

$$\omega_1 = \mu^*(\xi, X) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{2\pi} \ln r \quad (12)$$

onde $r = r(\xi, X)$, representa a distância entre o ponto campo $X = (x, y)$, e o ponto fonte $\xi = (\xi_x, \xi_y)$. A derivada da solução fundamental, em relação a direção normal ao contorno, é calculada como:

$$q^* = \frac{\partial \mu^*}{\partial \eta} = \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \eta} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \eta} \quad (13)$$

Aplicando a igualdade (11) na primeira integral de domínio pertencente à (10), e substituindo ω_1 por μ^* e $\frac{\partial \omega_1}{\partial \eta}$ por q^* , obtem-se:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \delta(\xi, x, y) \mu d\Omega(X) + \int_{\Omega} b\mu^*(\xi, x, y) d\Omega(X) + \\ & \int_{\Gamma} q\mu^*(\xi, x, y) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} q^*(\xi, x, y) \mu d\Gamma(X) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Seja a propriedade do Delta de Dirac:

$$\int_{\Omega} \delta(\xi, x, y) f(x, y) d\Omega(x, y) = f(\xi) \quad (15)$$

Aplicando a propriedade (15) e rearranjando os termos, (14) torna-se:

$$\begin{aligned} \mu(\xi, t) = & \int_{\Gamma} q\mu^*(\xi, x, y) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} q^*(\xi, x, y) \mu d\Gamma(X) + \\ & \int_{\Omega} b\mu^*(\xi, x, y) d\Omega(X) \end{aligned} \quad (16)$$

É através de (16) que se obtém a solução para os pontos ξ pertencentes ao domínio. Para os valores de $\mu(x, y, t)$ e $q(x, y, t)$ pertencentes ao contorno Γ , será necessário um tratamento diferenciado: exclui-se do domínio Ω um círculo Ω_ϵ de raio ϵ , com centro em ξ , sendo $\xi \in \Gamma$. Logo em seguida, toma-se o limite quando ϵ tende a zero. Aplicado o limite, através de [4], é obtida a equação fundamental do método dos elementos de contorno:

$$\begin{aligned} c(\xi)\mu(\xi, t) + \int_{\Gamma} q^*(\xi, x, y) \mu d\Gamma(X) = \\ \int_{\Gamma} q\mu^*(\xi, x, y) d\Gamma(X) + \int_{\Omega} b\mu^*(\xi, x, y) d\Omega(X) \end{aligned} \quad (17)$$

onde:

$$c(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi \notin \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{se } \xi \in \text{contorno suave} \\ 1 & \text{se } \xi \in \Omega \end{cases}$$

A equação (17) é válida para pontos ξ pertencentes, tanto para o domínio Ω , quanto para o contorno Γ .

III. DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL E SOLUÇÃO DOS SISTEMAS

Para a obtenção das variáveis μ e q , primeiramente é necessário que o contorno Γ seja discretizado. Segundo [5], tal discretização deve ser feita por elementos que sejam capazes de proporcionar uma boa aproximação para a geometria do contorno. Esses elementos são denominados elementos de contorno, cuja a geometria adotada neste trabalho será a linear.

Assim como o contorno, o domínio também será discretizado. Tal discretização será efetuada através da divisão do domínio em pequenas regiões chamadas células. Neste trabalho serão adotadas células com formato triangular, que são definidas, de modo a envolver todos os pontos do contorno e do domínio.

Com o contorno e o domínio discretizados, (17) pode ser reescrita como uma soma de integrais sobre elementos e células para um número finito de pontos ou nós ξ_i selecionados:

$$\begin{aligned} c(\xi_i)\mu(\xi_i, t) + \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} q^*(\xi_i, x, y) \mu d\Gamma = \\ \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} q\mu^*(\xi_i, x, y) d\Gamma + \sum_{j=1}^{NC} \int_{\Omega_j} b\mu^*(\xi_i, x, y) d\Omega \end{aligned} \quad (18)$$

onde NE representa o número de elementos que discretizam o contorno e NC sendo o números de células que constituem o domínio.

A função $b(x, y, t)$, presente em (18), é composta pela derivada de primeira e de segunda ordem de $\mu(x, y, t)$ em relação ao tempo. A derivada de primeira ordem pode ser representada através de diferenças regressivas:

$$\dot{\mu}_{n+1} = \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\Delta t} \quad (19)$$

onde o índice $(n + 1)$, conforme [6], refere-se ao tempo, $t_{n+1} = (n + 1)\Delta t$ sendo Δt o intervalo de tempo adotado na discretização temporal.

Para a aproximação da derivada de segunda ordem de $\mu(x, y, t)$, pelo tempo, teremos:

$$\ddot{\mu}_{n+1} = \frac{\mu_{n+1} - 2\mu_n + \mu_{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad (20)$$

Após a aplicação de (18) para todos os nós do contorno e pontos internos, o seguinte sistema de equações é obtido:

$$\begin{bmatrix} H^{cc} & 0 \\ H^{dc} & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu^c \\ \mu^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{cc} \\ G^{dc} \end{bmatrix} \{q^c\} + \begin{bmatrix} M^{cc} & M^{cd} \\ M^{dc} & M^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b^c \\ b^d \end{Bmatrix} \quad (21)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} b^c \\ b^d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g^c \\ g^d \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{\mu}^c \\ \dot{\mu}^d \end{Bmatrix} - 2\alpha \begin{Bmatrix} \dot{\mu}^c \\ \dot{\mu}^d \end{Bmatrix} - \beta^2 \begin{Bmatrix} \mu^c \\ \mu^d \end{Bmatrix}$$

Utilizando a notação usual do MEC, as matrizes H e G provém das integrais de contorno que possuem respectivamente $q^*(\xi_i, x, y)\mu(x, y, t)$ e $q(x, y, t)\mu^*(\xi_i, x, y)$ como integrando. As matrizes M representam a integração através do domínio sobre termo $b(x, y, t)\mu^*(\xi_i, x, y)$. A submatriz indentidade pertencente ao lado esquerdo da igualdade, representa os valores de $c(\xi_i)$, para os pontos ξ_i que provém do domínio. O superíndice c indica contorno e d , domínio.

Substituindo as igualdades (19) e (20) em (21) e agrupando os termos semelhantes, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} (H^{cc} - \rho_1 M^{cc}) & -\rho_1 M^{cd} \\ (H^{dc} - \rho_1 M^{dc}) & (I - \rho_1 M^{dd}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_{n+1}^c \\ \mu_{n+1}^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{cc} \\ G^{dc} \end{bmatrix} \{q_{n+1}^c\} + \begin{bmatrix} M^{cc} & M^{cd} \\ M^{dc} & M^{dd} \end{bmatrix} \times \left(\rho_2 \begin{Bmatrix} \mu_n^c \\ \mu_n^d \end{Bmatrix} + \rho_3 \begin{Bmatrix} \mu_{n-1}^c \\ \mu_{n-1}^d \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g_{n+1}^c \\ g_{n+1}^d \end{Bmatrix} \right) \quad (22)$$

onde

$$\rho_1 = -\frac{1}{(\Delta t)^2} - \frac{2\alpha}{\Delta t} - \beta^2 \quad (23)$$

$$\rho_2 = \frac{2}{(\Delta t)^2} + \frac{2\alpha}{\Delta t} \quad (24)$$

$$\rho_3 = -\frac{1}{(\Delta t)^2} \quad (25)$$

Como o sistema (22) foi originado através do uso exclusivo da diferença finita regressiva como aproximação de suas derivadas pelo tempo, a sua denominação é MEC-D.

Para uma segunda forma de resolução, utiliza-se a aproximação da primeira derivada temporal de $\mu(x, y, t)$, através do método de Houbolt (1959), [7]:

$$\dot{\mu}_{n+1} = \frac{1}{6\Delta t} [11\mu_{n+1} - 18\mu_n + 9\mu_{n-1} - 2\mu_{n-2}] \quad (26)$$

A segunda derivada temporal de $\mu(x, y, t)$ com o método de Houbolt, é aproximado como segue:

$$\ddot{\mu}_{n+1} = \frac{1}{(\Delta t)^2} [2\mu_{n+1} - 5\mu_n + 4\mu_{n-1} - \mu_{n-2}] \quad (27)$$

Aplicando as igualdades (26) e (27) em (21) e agrupando os termos semelhantes, será obtido o seguinte sistema que será denominado como MEC-H:

$$\begin{bmatrix} (H^{cc} - \sigma_1 M^{cc}) & -\sigma_1 M^{cd} \\ (H^{dc} - \sigma_1 M^{dc}) & (I - \sigma_1 M^{dd}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_{n+1}^c \\ \mu_{n+1}^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{cc} \\ G^{dc} \end{bmatrix} \{q_{n+1}^c\} + \begin{bmatrix} M^{cc} & M^{cd} \\ M^{dc} & M^{dd} \end{bmatrix} \times \left(\sigma_2 \begin{Bmatrix} \mu_n^c \\ \mu_n^d \end{Bmatrix} + \sigma_3 \begin{Bmatrix} \mu_{n-1}^c \\ \mu_{n-1}^d \end{Bmatrix} + \sigma_4 \begin{Bmatrix} \mu_{n-2}^c \\ \mu_{n-2}^d \end{Bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} M^{cc} & M^{cd} \\ M^{dc} & M^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_{n+1}^c \\ g_{n+1}^d \end{Bmatrix}$$

sendo

$$\sigma_1 = -\frac{2}{(\Delta t)^2} - \frac{11\alpha}{3\Delta t} - \beta^2 \quad (28)$$

$$\sigma_2 = \frac{5}{(\Delta t)^2} + \frac{6\alpha}{\Delta t} \quad (29)$$

$$\sigma_3 = -\frac{4}{(\Delta t)^2} - \frac{3\alpha}{\Delta t} \quad (30)$$

$$\sigma_4 = \frac{1}{(\Delta t)^2} + \frac{2\alpha}{3\Delta t} \quad (31)$$

Os dois métodos numéricos: MEC-D e MEC-H, são analisados para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

IV. RESULTADOS

A. EXEMPLO 1

Seja a equação bidimensional do telégrafo, conforme (1), com $\alpha = (1 + \pi^2)$, $\beta = 1$ e $g(x, y, t) = 0$. A solução analítica, segundo Pekmen e Tezer-Sezgin [8], é dada por:

$$\mu(x, y, t) = e^{-t} \sin(x\pi) \sin(y\pi)$$

com as seguintes condições iniciais:

$$\mu(x, y, 0) = \sin(x\pi) \sin(y\pi)$$

$$\mu_t(x, y, 0) = -\sin(x\pi) \sin(y\pi)$$

e as condições de contorno essenciais ou Dirichlet :

$$\mu(1, 49, y, t) = e^{-t} \sin(1, 49\pi) \sin(y\pi)$$

$$\mu(0, y, t) = 0$$

$$\mu(x, 0, t) = 0$$

$$\mu(x, 0, 9996, t) = 0$$

A malha utilizada para o primeiro exemplo possui $0 \leq x \leq 1, 49$ e $0 \leq y \leq 0, 9996$. O contorno será constituído de sessenta elementos e o domínio será formado por quatrocentos e trinta e duas células triangulares.

Para o instante $t = 0, 8$, as figuras 1 e 2 representam respectivamente as formulações MEC-D e MEC-H, e são comparadas com a função analítica, figura 3. O instante $t = 2, 4$ é ilustrado pelos gráficos 4, 5 e 6, que representam, respectivamente, as formulações MEC-D, MEC-H e a função analítica.

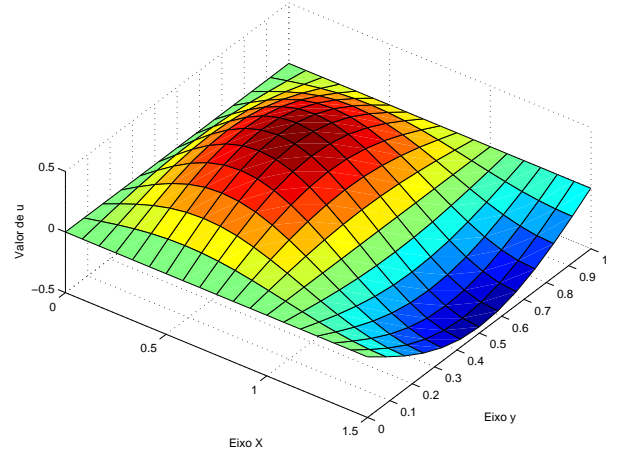


Figura 2. Valor de $\mu(x, y, 0, 8)$:MEC-H.

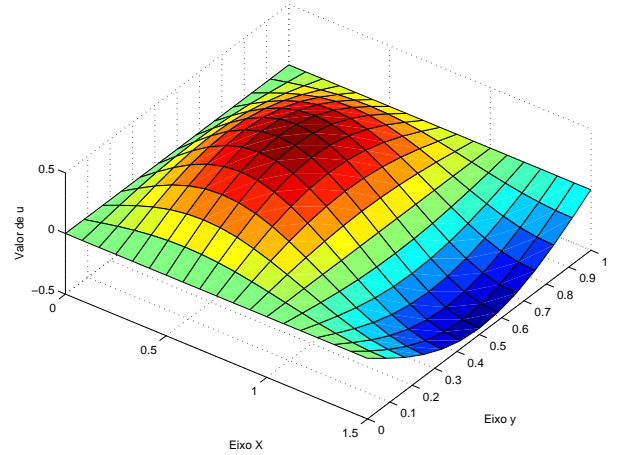


Figura 3. Valor de $\mu(x, y, 0, 8)$:Analítica.

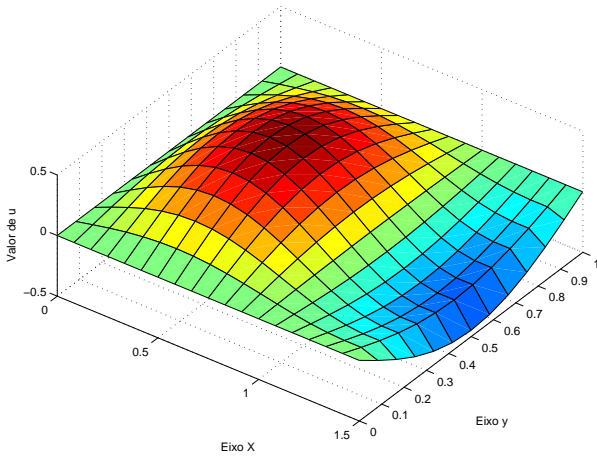


Figura 1. Valor de $\mu(x, y, 0, 8)$:MEC-D.

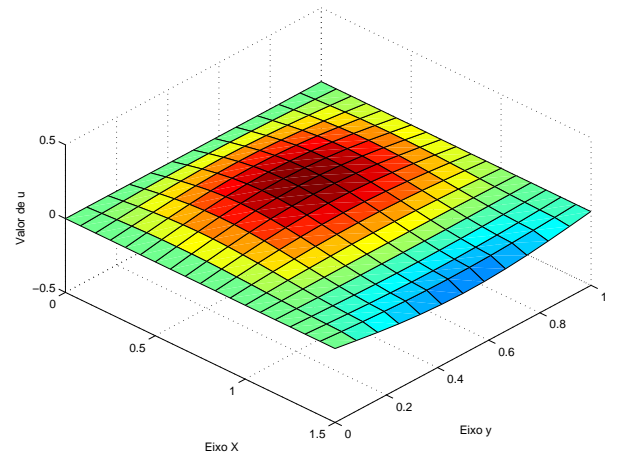


Figura 4. Valor de $\mu(x, y, 2, 4)$:MEC-D.

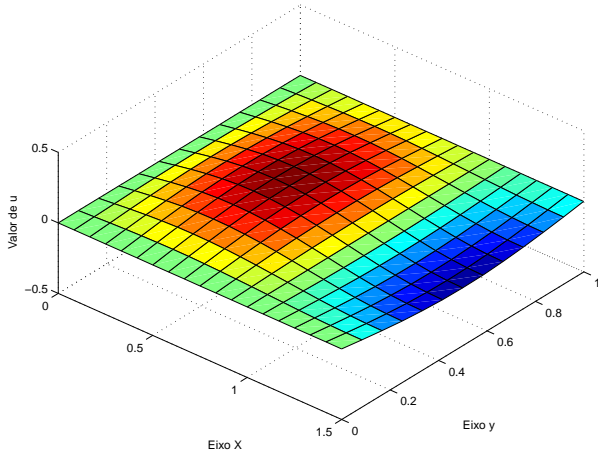


Figura 5. Valor de $\mu(x, y, 2, 4)$:MEC-H.

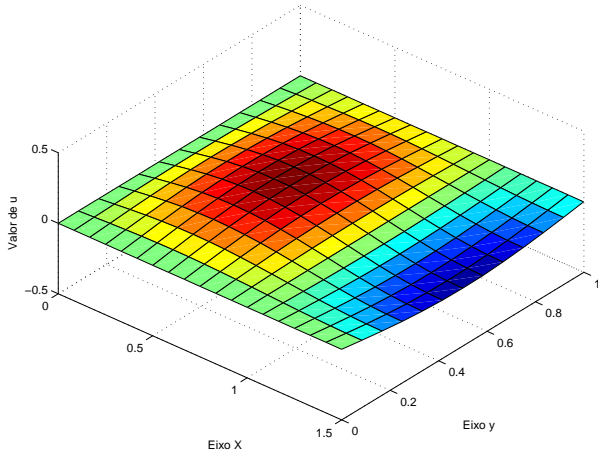


Figura 6. Valor de $\mu(x, y, 2, 4)$:Analítica.

As duas formulações obtiveram resultados satisfatórios, mas Houbolt demonstrou melhor aproximação, apresentando uma maior similaridade perante a função analítica para ambos os instantes de tempo. Todos os resultados foram executados para o intervalo de tempo $\Delta t = 0,08$.

B. EXEMPLO 2

Vamos considerar a seguinte equação bidimensional do telégrafo com $\alpha = 1, \beta = 1$ e

$$g(x, y, t) = \frac{2}{1 + x + y + t} + \ln(1 + x + y + t) + \frac{1}{(1 + x + y + t)^2}$$

com solução analítica, segundo [8], será:

$$\mu(x, y, t) = \ln(x + y + t + 1)$$

Dada as condições iniciais:

$$\mu(x, y, 0) = \ln(1 + x + y)$$

$$\mu_t(x, y, 0) = \frac{1}{1 + x + y}$$

e as condições de contorno:

$$\mu(x, 0, t) = \ln(x + t + 1)$$

$$\mu(1, 5, y, t) = \ln(y + t + 2, 5)$$

$$\mu(x, 1, t) = \ln(x + t + 2)$$

$$\mu(0, y, t) = \ln(y + t + 1)$$

A malha utilizada para o segundo exemplo possui $0 \leq x \leq 1, 5$ e $0 \leq y \leq 1$. O contorno será constituído por oitenta e quatro elementos e o domínio será formado por setecentos e sessenta e oito células triangulares.

O instante $t = 1, 5$, será representado pelo esquema MEC-D através da figura 7, MEC-H pela figura 8, sendo comparados a função analítica, figura 9. Para o instante $t = 4, 5$, as figuras 10, 11 e 12, ilustram, respectivamente, os métodos MEC-D, MEC-H e a função analítica.

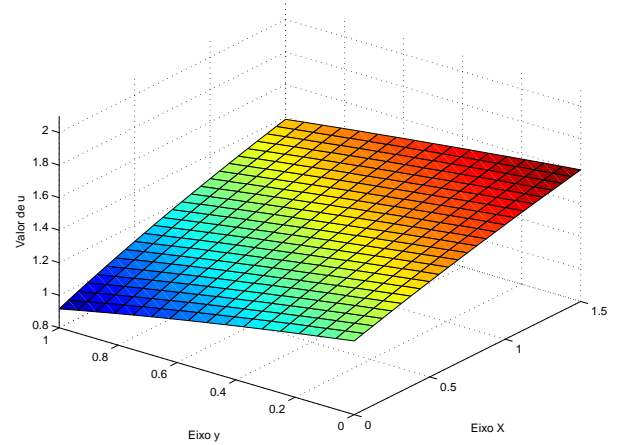


Figura 7. Valor de $\mu(x, y, 1, 5)$:MEC-D.

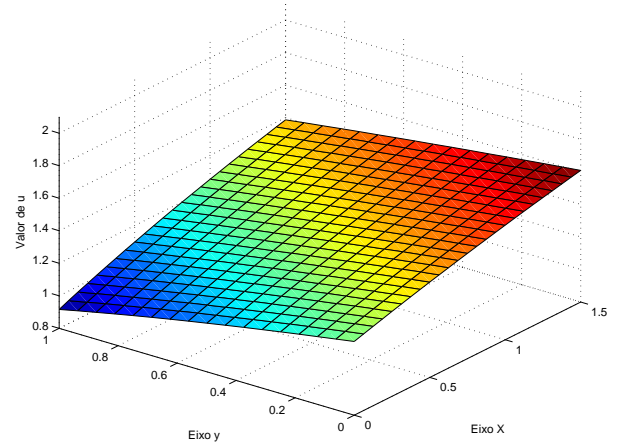


Figura 8. Valor de $\mu(x, y, 1, 5)$:MEC-H.

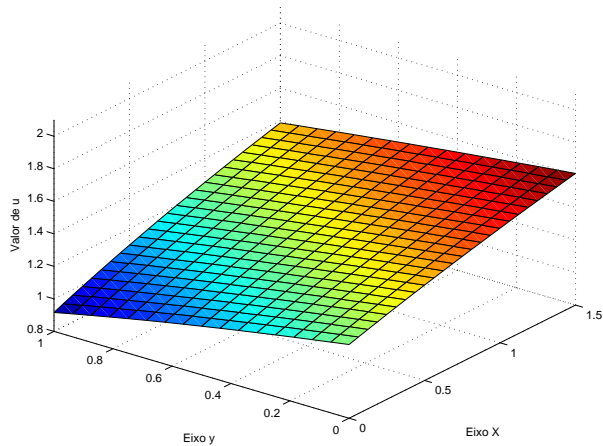


Figura 9. Valor de $\mu(x, y, 1, 5)$:Analítica.

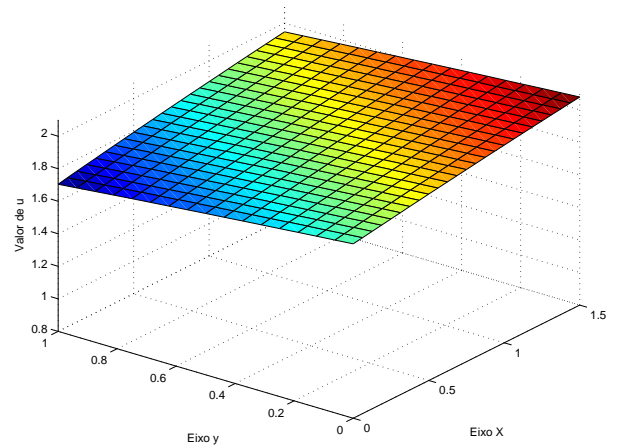


Figura 12. Valor de $\mu(x, y, 4, 5)$:Analítica.

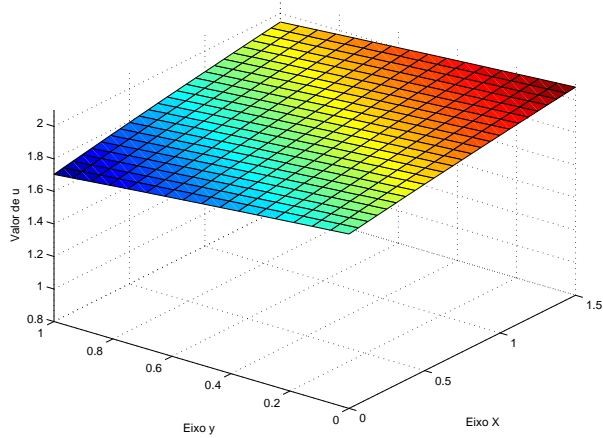


Figura 10. Valor de $\mu(x, y, 4, 5)$:MEC-D.

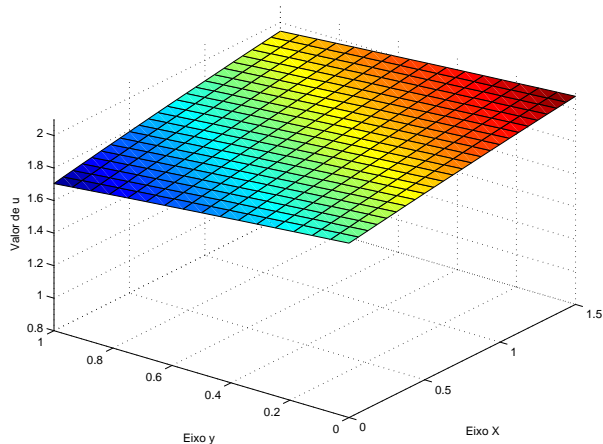


Figura 11. Valor de $\mu(x, y, 4, 5)$:MEC-H.

resultados foram obtidos para o intervalo de tempo $\Delta t = 0,15$.

REFERÊNCIAS

- [1] E. Orsingher, "A Planar Random Motion Governed by the Two-Dimensional Telegraph Equation," *Applied. Probability. Trust*, vol. 23, pp. 297–385, 1986.
- [2] V. V. Kirillov, "Two-dimensional theory of elf electromagnetic wave propagation in the earth-ionosphere waveguide channel," *Radiophysics. and. Quantum. Electronics*, vol. 39, pp. 737–743, 1996.
- [3] R. K. Mohanty, "New unconditionally stable difference schemes for the solution of multi-dimensional telegraphic equations," *International. Journal. of. Computer. Mathematics*, vol. 86, pp. 2061–2071, 2009.
- [4] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles and L. C. Wrobel, "Boundary Element Techniques Theory and Application in Engineering," Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984.
- [5] W. J. Mansur, J.H.A Prodanoff and J.P.S Azevedo, "Métodos Numéricos em Recursos Hídricos," Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Porto Alegre, 1996.
- [6] R. J. Vanzuit, "Análise do Fluxo Bidimensional de Calor Pelo Método dos Elementos de Contorno com Soluções Fundamentais Independente do Tempo," Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.
- [7] J. A. M. Carrer and W. J. Mansur, "Alternative time-marching schemes for elastodynamic analysis with the domain boundary element method formulation," *Computational Mechanics*, vol. 34, pp. 387–399, 2004.
- [8] B. Pekmen and M. Tezer-Sezgin, "Differential Quadrature Solution of Hyperbolic Telegraph Equation," *Hindawi*, pp. 1–18, 2012.

Como pode-se observar, tanto MEC-D como MEC-H apresentaram resultados expressivos para os dois instantes de tempo, representando a função analítica de maneira muito similar. Todos os