



**Simpósio de Métodos
Numéricos em Engenharia**

25 a 27 de outubro, 2017

Aplicação do Método de Diferenças Finitas para Calcular a Deformação de Placas

Mariana C. P. Bernardi, Adilandri M. Lobeiro

Ricardo A. Andreotti, Jorge L. N. Goes

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Departamento Acadêmico de Matemática (DAMAT)

Campo Mourão, Brasil

marianabernardi@alunos.utfpr.edu.br, alobeiro@utfpr.edu.br,

andreotti@alunos.utfpr.edu.br, jgoes@utfpr.edu.br

Liliana Madalena Gramani

Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Departamento de Matemática (DMAT)

Curitiba, Brasil

gramani@ufpr.br

Resumo—Neste trabalho obteve-se a solução numérica da Equação Diferencial Parcial de quarta ordem, que controla a deflexão de placas, via o Método de Diferenças Finitas. Após a discretização da placa gerou-se um sistema de equações lineares, cuja solução foi obtida por meio do método de Gauss-Seidel, com uso de um algoritmo implementado no software *MatLab*[®] e comparada com o já consagrado software *Robot Structural Analysis*.

Palavras-chave—Placa Engastada; Deflexão; Condições de Contorno; Equação Diferencial Parcial; Método de Diferenças Finitas;

I. INTRODUÇÃO

A Equação Diferencial Parcial (EDP) que controla a deformação de uma placa engastada, é dada por

$$D_x \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) + 2H \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y) + D_y \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y) = \rho(x, y), \quad (1)$$

em que, $D_x = \frac{E_x t^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}$, $D_y = \frac{E_y t^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}$, $D_{xy} = \frac{G_{xy} t^3}{6}$ e $H = \frac{(D_x \nu_{yx} + D_y \nu_{xy} + 4D_{xy})}{2}$, em que a , b , c e d são as extremidades da placa, ν_{xy} e ν_{yx} são os coeficientes de Poisson, E_x e E_y são os módulos de elasticidade, G_{xy} é o módulo de elasticidade transversal, $\rho(x, y)$ é a carga e t é a espessura da placa [2]. A EDP (1) está definida em $\Omega = \{(x, y) | a < x < b, c < y < d\}$ e sujeita as seguintes condições de contorno,

$$\frac{\partial w}{\partial x}(a, y) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(b, y) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x, c) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x, d) = 0. \quad (2)$$

II. DESENVOLVIMENTO

Para obter a solução numérica da EDP (1), utilizou-se o Método de Diferenças Finitas (MDF), pois a mesma não possui solução analítica [1]. A equação (1) foi discretizada na região Ω , onde o eixo das abcissas e ordenadas foram divididos, respectivamente, em “ M ” e “ N ” partes iguais de comprimento $h = (b - a) / M$ e $k = (d - c) / N$, sendo $x_i = a + (i - 1)h$ e $y_j = c + (j - 1)k$ em que $i = 1 \dots M, M + 1$ e $j = 1 \dots N, N + 1$, conforme ilustra a Figura 1.

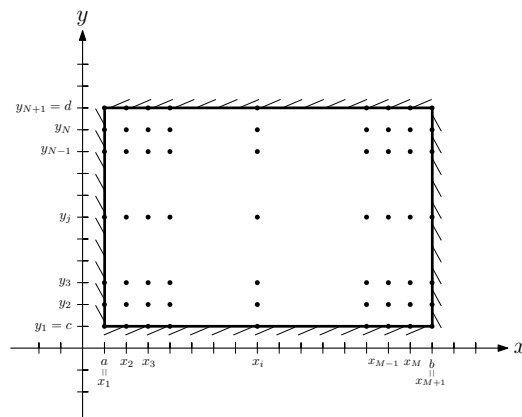


Figura 1: Discretização do domínio Ω

Ao substituir as fórmulas de diferenças

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+2}, y_j) - 4u(x_{i+1}, y_j) + 6u(x_i, y_j) - 4u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i-2}, y_j)}{h^4}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+2}) - 4u(x_i, y_{j+1}) + 6u(x_i, y_j) - 4u(x_i, y_{j-1}) + u(x_i, y_{j-2})}{k^4} \quad (4)$$

e

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_{j+1}) - 2u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i+1}, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_{j+1}) + 4u(x_i, y_j) - 2u(x_i, y_{j-1}) + u(x_{i-1}, y_{j+1}) - 2u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_{j-1})}{h^2 k^2}, \quad (5)$$

com $i = 2 \dots M$ e $j = 2 \dots N$ na EDP (1) obtém-se o sistema de equações lineares

$$w_{i,j} = (-Aw_{i+2,j} - Bw_{i+1,j} - Bw_{i-1,j} - Aw_{i-2,j} - Dw_{i+1,j+1} - Dw_{i+1,j-1} - Ew_{i,j+1} - Ew_{i,j-1} - Dw_{i-1,j+1} - Dw_{i-1,j-1} - Fw_{i,j+2} - Fw_{i,j-2} + G)/C, \quad (6)$$

em que $w_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$, $A = k^4 D_x$, $B = -4(D_x k^4 + H h^2 k^2)$, $C = 6D_x k^4 + 8H h^2 k^2 + 6D_y h^4$, $D = 2H h^2 k^2$, $E = -4(H h^2 k^2 + D_y h^4)$, $F = D_y h^4$ e $G = \rho h^4 k^4$.

Para um estudo de caso, considerou-se os seguintes valores: $a = 0$ mm, $b = 6000$ mm, $c = 0$ mm, $d = 3000$ mm, $t = 100$ mm, $M = 20$, $N = 10$, $E_x = 210$ GPa, $E_y = 210$ GPa, $G_{xy} = 80,8$ GPa, $\nu_{xy} = 0,3$, $\nu_{yx} = 0,3$ e $\rho = 0,001$ MPa. Ao utilizar as condições de contorno (2), obteve-se um sistema de equações lineares de $(M-1)(N-1)$ incógnitas por $(M-1)(N-1)$ equações, cuja solução foi obtida por meio do método de Gauss-Seidel com uso de um algoritmo implementado no *software MatLab*[®]. A solução do sistema representa a solução numérica da EDP (1) sujeita as condições de contorno (2). A Tabela I apresenta a comparação entre as soluções obtidas nos *softwares MatLab*[®] e *Robot Structural Analysis*.

Tabela I: Comparação entre as soluções obtidas nos *software MatLab*[®] e *Robot Structural Analysis*

x (m)	y (m)	MatLab (mm)	Robot (mm)	Erro Relativo
0,9	1,5	-0,0050009	-0,005	0,02%
1,2	1,5	-0,0067166	-0,0068	1,23%
1,5	1,5	-0,0080888	-0,0083	2,54%
1,8	1,5	-0,0091204	-0,0094	2,97%
2,1	1,5	-0,0098529	-0,01	1,47%
2,4	1,5	-0,010335	-0,011	6,05%
2,4	1,5	-0,010335	-0,011	6,05%
2,7	1,5	-0,010606	-0,011	3,58%
3	1,5	-0,010696	-0,011	2,76 %

As Figuras 2 e 3 representam as imagens das deflexões obtidas nos *software*.

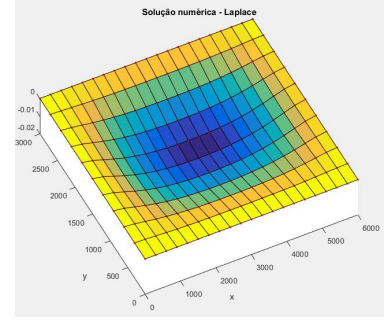


Figura 2: Deflexão da Placa via *software MatLab*[®]

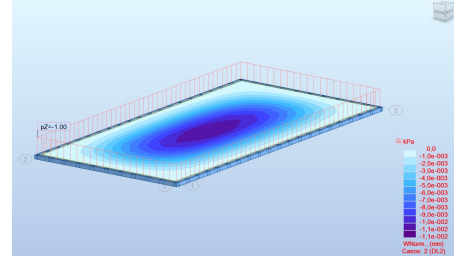


Figura 3: Deflexão da Placa via *software Robot*

III. CONCLUSÃO

O algoritmo desenvolvido para calcular a deflexão da placa via *software MatLab*[®] mostrou-se eficiente, pois ao comparar com o *software Robot Structural Analysis*, obteve-se um bom resultado.

REFERÊNCIAS

- [1] R. L. Burden and J. D. Faires, *Análise Numérica, Pioneira Thomson Learning.*, São Paulo, 2003.
- [2] J. L. N. Goes, *Análise de Pontes de Madeira Protendidas Transversalmente com Seção Caixaõ*. Tese de Doutorado, USP, 2005.