



**Simpósio de Métodos
Numéricos em Engenharia**

25 a 27 de outubro, 2017

Relax-and-fix Aplicado ao Problema de Roteamento em Arcos Capacitado e Periódico com Movimento Contínuo

Jailson Domingos de Oliveira
Departamento de Matemática/
UNICENTRO
Curitiba, Brasil
jailson-de-oliveira@hotmail.com

Arinei Carlos Lindbeck da Silva
Departamento de Engenharia da
Produção/ UFPR
Curitiba, Brasil

Cassius Tadeu Scarpin
Departamento de Administração
Geral e Aplicada/ UFPR
Curitiba, Brasil

Resumo— Nesse trabalho, aplicou-se estratégias baseadas na heurística relax-and-fix como método de solução para o Problema de Roteamento em Arcos Capacitado e Periódico com Movimento Contínuo. Os Problema de Roteamento em Arcos Capacitado e Periódico são pouco explorados na literatura, são classificados como NP-hard e comumente aplicados na coleta de resíduos, inspeção de linhas, supressão de poeira em estrada, monitoramento de vias, inspeção de ferrovias, despejo de sal em vias com neve entre outras aplicações. Devido sua complexidade métodos exatos são inviáveis para sua resolução, sendo necessário aplicação de método heurísticos. Nesse contexto foi aplicado 4 estratégias do tipo relax-and-fix no modelo estudado. Os testes realizados indicam que as estratégias são rápidas na obtenção de uma solução inicial para o modelo, com tempo médio de 4,98 minutos e desvio médio de 8,14 da melhor solução conhecida para as instâncias propostas. Mas faz-se necessário desenvolver novas estratégias afim de evitar infactibilidade que foi recorrente nos testes.

Palavras-chave— *problema de roteamento em arco capacitado e periódico com movimento contínuo; heurística; relax-and-fix.*

I. INTRODUÇÃO

A logística pode ser entendida como o processo que compreende o gerenciamento do fluxo de produtos, desde os pontos de fornecimento até os pontos de consumo, satisfazendo a demanda dos clientes de maneira eficiente e com menor custo. Os problemas logísticos podem ser divididos em três grandes problemas, localização de facilidades, gerenciamento de

armazéns e roteamento de veículos. Nesse trabalho considerou-se especificamente o problema de roteamento de veículos.

O termo roteirização surge como forma equivalente do inglês “*Routing*” e é utilizado para determinar uma ou mais rotas ou sequências de paradas a serem realizadas por um conjunto de veículos, com o objetivo de visitar um conjunto de pontos ou clientes que necessitam de atendimento, sujeitos a restrições operacionais adicionais [1].

Problemas de roteamento de veículos podem ser classificados em duas classes: Problema de Roteamento em Nós e Problemas de Roteamento em Arcos. O primeiro consiste em determinar uma ou mais rotas que passe(m) por todos os nós ou vértices de um grafo, enquanto o roteamento em arcos tem por objetivo determinar uma ou mais rotas que atenda(m) todos os arcos ou arestas de um grafo [2].

Um dos primeiros problemas de roteirização em arcos a ser estudado foi o Problema do Carteiro Chinês – PCC (*Chinese Postman Problem*) proposto por Mei Gu Guan em 1962, que consiste em encontrar o roteiro ou sequência de ruas a serem percorridas, no mínimo uma vez cada rua, por um carteiro de forma a minimizar a distância total percorrida. Desde então, novas restrições vêm sendo incorporadas ao problema, como: um conjunto de arestas que devem ser obrigatoriamente percorrido é um subconjunto das arestas do grafo, um conjunto de k carteiros ($k > 1$) trabalhando em conjunto entre outras, de modo a modelar as diferentes aplicações reais que requerem roteirização dando origem, assim, há diversos novos problemas, a saber, por exemplo: o Problema do K-Carteiro Chinês [3],

Problema do Carteiro Chinês com Vento [4], Problema do Carteiro Chinês Hierárquico [5], Problema do carteiro Rural [6], Problema de Roteamento em Arcos Capacitados [7], entre outros.

Nesse processo, destaca-se o Problema de Roteamento em Arcos Capacitado e Periódico (*Periodic Capacitated Arc Routing Problem - PCARP*) considerado uma extensão do Problema de Roteamento em Arcos Capacitado (CARP). No PCARP, ao invés do problema abordar apenas tomada de decisões de nível operacional, aborda-se decisões de níveis tático e operacionais, para horizontes de tempo maiores do que um período, com restrições de capacidades e frequência [8].

Os autores [9] destacam que pesquisas sobre o PCARP são recentes. Todavia, o interesse e a demanda pela aplicação de modelos de roteirização em arcos para problemas reais fazem com que pesquisas sobre o PCARP tenham aumentado gradativamente na última década. O PCARP tem sido amplamente aplicado em: coleta de resíduos urbanos [8]-[9]-[10], monitoramento de redes rodoviárias [2]-[11], supressão de poeira em estradas [12]-[13], manutenção preditiva e preventiva de linhas férreas [14]-[15]-[16], irrigação de árvores [17] entre outras.

Segundo os autores [8] o PCARP é considerado NP-hard e sua resolução de maneira exata é considerada difícil. Logo faz-se necessário aplicar outros métodos de resolução, como é o caso dos métodos heurísticos que são capazes de determinar soluções aceitáveis com pouco esforço e tempo computacional. As heurísticas são capazes de resolver problemas levando em consideração as características do problema.

Esse estudo, contemplou a heurística Relax-and-Fix (R&F) descrita em [18], como método de solução para o PCARP, especificamente o Problema de Roteamento em Arcos Capacitado e Periódico com Movimento Contínuo (PCARPMC) proposto em [16].

II. PROBLEMA DE ROTEAMENTO EM ARCOS CAPACITADO E PERIÓDICO COM MOVIMENTO CONTÍNUO

Em [16] são apresentados dois modelos para o PCARP, ambos com as seguintes características: a possibilidade de o veículo folgar em um determinado dia; não necessidade de voltar a um depósito ao final de um dia; penalidade caso a periodicidade de um arco não seja respeitada; e a capacidade do veículo foi convertida na máxima distancia que o veículo pode percorrer, ou seja, 1 arco por dia. Os modelos foram aplicados na manutenção preditiva e preventiva de linhas férreas.

Considerou-se o segundo modelo proposto em [16] PCARPMC, que apresenta uma modificação em relação ao primeiro modelo proposto. Nessa nova formulação os veículos não necessitam terminar suas rotas no nó de origem de sua rota, podendo terminar em qualquer nó, desde que esse seja origem da rota de qualquer outro veículo. A seguir descreve-se o modelo proposto em [16].

Parâmetros:

$G = (X, E)$: grafo não direcionado;

X : conjunto de vértices (nós);

E : conjunto de arestas;

$[i, j]$: aresta formado pelos pontos i e j ;

c_{ij} : custo associado a aresta $[i, j]$;

PU_{ij} : punição associada ao atraso da aresta $[i, j]$;

H : horizonte de tempo por np períodos;

np : número de períodos de H ;

K : conjunto de veículos;

MP_{ij} : periodicidade do arco $[i, j]$;

S : subconjunto de arestas $[i, j]$ com $MP_{ij} < np$;

R : subconjunto de arestas $[i, j]$ com $MP_{ij} = np$.

Modelo:

$$\min Z = \sum_{[i,j] \in E} \sum_{k=1}^{nk} \sum_{p=1}^{np} c_{ij} * x_{ijkp} + \sum_{[i,j] \in E} \sum_{p=1}^{np} PU_{ij} * p_{ijp} \quad (1)$$

Sujeito à:

$$\sum_{[i,j] \in E} x_{ijkp} + f_{jkp} = \sum_{[i,j] \in E} x_{jik,p+1} + f_{jk,p+1} \quad \forall j \in X, \forall k \in K, p = 1, \dots, np - 1 \quad (2)$$

$$\sum_{[i,j] \in E} x_{ijk1} + f_{ik1} = y_i \quad \forall i \quad (3)$$

$$\sum_{[i,j] \in E} x_{ijk,np} + f_{jk,np} = y_j \quad \forall j \quad (4)$$

$$\sum_{[i,j] \in E} x_{ijkp} + \sum_{[i,j] \in E} x_{jikp} + \sum_{i=1}^n f_{ikp} = 1 \quad \forall p \in H, \forall k \in K \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{nk} \left(x_{ijkp} + x_{jikp} + x_{ijk,p+1} + x_{jik,p+1} + \dots \right) + p_{ijp} \geq 1 \quad \forall [i, j] \in S, \forall p \in H \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^{nk} \sum_{p=1}^{np} (x_{ijkp} + x_{jikp}) \geq 1 \quad \forall [i, j] \in R \quad (7)$$

$$x_{ijkp}, p_{ijp}, f_{ikp} \in \{0,1\} \quad \forall [i, j] \in E, \forall k \in K, \forall p \in H \quad (8)$$

$$y_i \in N^+ \quad (9)$$

$$x_{ijkp} \begin{cases} 1, & \text{se o carro } k \text{ se desloca do ponto } i \text{ para o} \\ & \text{ponto } j \text{ no período } p \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$p_{ijp} \begin{cases} 1, & \text{se o arco } x_{ij} \text{ não respeita a periodicidade} \\ & \text{no período } p \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_{ikp} \begin{cases} 1, & \text{se o carro } k \text{ fica parado no ponto } i \text{ no dia} \\ & p \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$y_i \begin{cases} \text{Contabiliza a quantidade de carros que sai} \\ \text{do ponto } i \text{ no dia 1 e chega no ponto } i \text{ no} \\ \text{dia } np. \end{cases}$$

O objetivo do modelo (1) é minimizar custos de deslocamentos e atrasos. Restrição (2) garante o fluxo contínuo. As restrições (3) e (4) asseguram que a quantidade de veículos que sai de um vértice no dia 1, será igual à quantidade que retorna nesse vértice no dia np . Restrição (5) garante que cada veículo terá uma designação para cada dia.

A restrição (6) refere-se à periodicidade que deve ser atendida em cada aresta. A restrição que garante que os arcos com periodicidade igual a 1 sejam atendidos é dado em (7). E por fim a restrição (8) garante que as variáveis x_{ijkp} , p_{ijp} e f_{ikp} sejam binárias e (9) que a variável y_i inteira positiva.

III. MÉTODO DE SOLUÇÃO

Como método de solução para o PCARPMC foi proposto o uso da heurística relax-and-fix (R&F). A heurística consiste em um método de decomposição de um modelo de programação inteira mista em submodelos menores disjuntos, que podem ser resolvidos rapidamente, porém sem a garantia de otimalidade.

A escolha da heurística justifica-se devido sua ampla aplicação em problemas de otimização combinatória, em especial, problemas de dimensionamento de lotes [19]-[20]-[21]. Segundo a literatura [20]-[21] a heurística R&F tem demonstrado bom desempenho na determinação de soluções iniciais. Esses resultados são posteriormente melhorados com a aplicação de uma heurística de melhoria, por exemplo a heurística Fix-and-Optimize.

A heurística propõe solucionar o problema em etapas, sendo que, cada etapa, resolve de forma exata um subproblema derivado do problema original [19]. Para tanto, baseia-se na partição das variáveis inteiras ou binárias do modelo, criando R conjuntos disjuntos Q^r , $r = 1, \dots, R$. As variáveis são particionadas em três grupos: um contendo variáveis inteiras e binárias; um segundo contendo as variáveis relaxadas (livres); e o último com variáveis fixas (com seu valor fixado). O número R de partições indica também o número de iterações da heurística [20]. O objetivo da heurística R&F é resolver

submodelos menores que o original e possivelmente, mais fáceis [21].

O comportamento da heurística é descrito em [22]. Considere um problema inteiro misto (MIP), supondo que as variáveis binárias y são particionadas em R conjuntos disjuntos Q^1, Q^2, \dots, Q^R . Então, resolve-se sequencialmente os R MIP's, denotados por MIP^r . Isto é, em uma iteração r as variáveis do submodelo MIP^r são particionadas em: variáveis $y \in Q^r$ ($r = 1, \dots, r-1$) são fixadas; variáveis $y \in Q^r$ são definidas como binárias; e variáveis $y \in Q^r$ ($r = r+1, \dots, R$) são relaxadas, contínuas no intervalo $[0,1]$. O submodelo MIP^r é resolvido, caso o submodelo seja infactível para-se a metodologia, pois não foi possível encontrar uma solução viável para o problema original, com as variáveis $y \in Q^r$ ($r = 1, \dots, r-1$) fixadas.

Apesar da heurística R&F apresentar bom desempenho para determinar soluções para problemas de dimensionamento de lotes, apresenta uma fraqueza, uma vez que um subproblema é otimizado apenas para um pequeno subconjunto de variáveis, a fixação dessas pode afetar negativamente a otimização em subproblemas posteriores, gerando assim, soluções de baixa qualidade ou até mesmo infactíveis. Portanto a escolha das partições das variáveis do problema afeta o desempenho da heurística [23].

As estratégias de decomposição do conjunto de variáveis do modelo PCARPMC são baseadas nas estratégias propostas em [24] para o PCARP. Optou-se para o processo de relaxação e fixação, variáveis binárias (x_{ijkp} , p_{ijp} e f_{ikp}). O processo de relaxação das variáveis binárias consiste em torná-las contínuas no intervalo $[0,1]$. A seguir são descritas as estratégias utilizadas.

Estratégia relax-ad-fix forward (R&F-F): Nessa estratégia o problema original foi dividido em R subconjuntos Q^r , com $r = 1, \dots, R$, a serem resolvidos de modo que cada subproblema P^r corresponda a um período/dia r do horizonte de tempo. A ordem da resolução é a cronológica, isto é, iniciando a resolução no subproblema correspondente ao

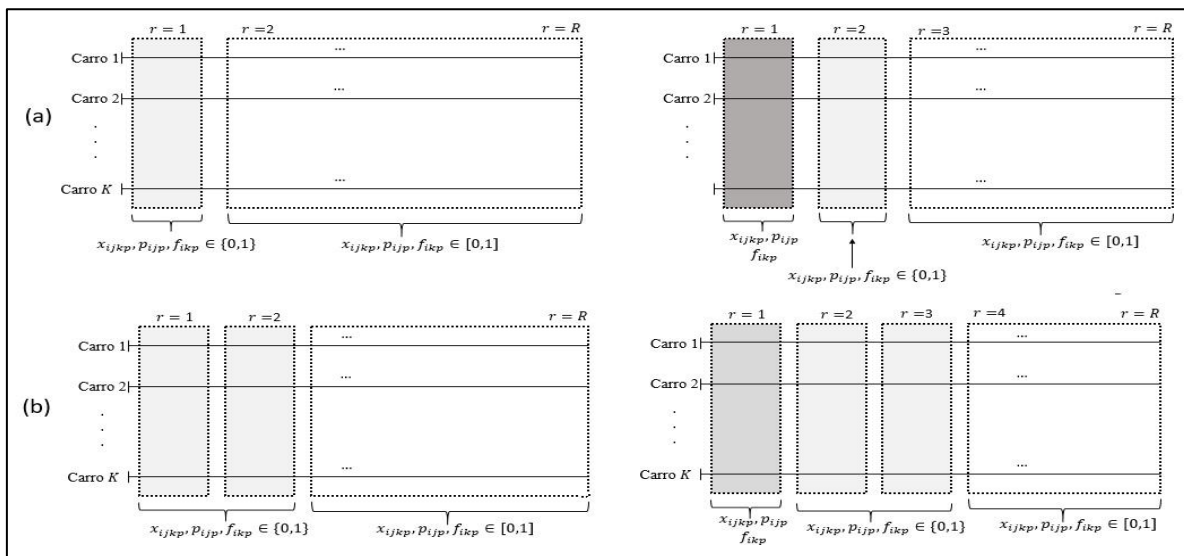


Figura 1. Estratégias Relax-and-Fix.

primeiro período do horizonte de tempo e finalizando no subproblema correspondente ao último período subproblema p^R .

A Fig.1 (a) ilustra essa estratégia. Para $r = 1$ tem-se: variáveis $X_{ijkp}, p_{ijp}, f_{ikp} \in Q^1$ como binária; variáveis $X_{ijkp}, p_{ijp}, f_{ikp} \in Q^r$ $r = 1, \dots, R$ relaxadas, isto é, contínuas no intervalo $[0,1]$. Na segunda iteração $r = 2$: variáveis X_{ijkp} ,

processo ocorre até que o último subproblema seja resolvido. A fig 1 (b) ilustra as duas primeiras iterações para essa estratégia.

Estratégia relax-and-fix overlapping 2 (R&F_O2): é baseada na sobreposição de partições, similar à estratégia anterior. Nesta proposta, cada subproblema MIP^r é resolvido mantendo as variáveis correspondentes aos períodos $r - 3, r - 2, r - 1$ e r binárias ($3 \leq r \leq R$) e as demais variáveis dos

Problema	R&F-F		R&F-B		R&F-O		R&F-O2		GUROBI
	Z	D	Z	D	Z	D	Z	D	Z
gdb1	-		-		-		-		451 ¹
gdb2	-		-		-		-		592
gdb3	-		-		-		-		340
gdb4	-		-		-		7562	2,00	2519
gdb5	-		-		-		-		17733
gdb6	-		-		456	0	-		456
gdb7	-		-		-		11508	21,65	508
gdb8	*		*		*		*		19363
gdb9	*		*		*		*		24465
gdb10	-		13754	17,46	-		-		745
gdb11	*		*		*		*		459
gdb12	-		-		-		-		527
gdb13	-		642	0,03	620	0	620	0	620
gdb14	-		147	0,01	-		145¹	0	145 ¹
gdb15	-		-		-		146	0,04	140
gdb16	-		192	0,05	182	0	182	0	182
gdb17	-		1178	6,01	168	0	-		168
gdb18	-		-		-		*		385
gdb19	2135	16,08	2145	16,16	125	0	127	0,02	125
gdb20	-		-		-		6280	21,51	279
gdb21	-		-		-		214	0,01	212
gdb22	-		*		*		*		426
gdb23	-		340	0,01	-		21375	62,62	336

$p_{ijp}, f_{ikp} \in Q^1$ são fixadas, tornando-se parâmetros; variáveis $X_{ijkp}, p_{ijp}, f_{ikp} \in Q^2$ são mantidas binárias e $X_{ijkp}, p_{ijp}, f_{ikp} \in Q^r$ $r = 3, \dots, R$ relaxadas.

Estratégia relax-and-fix backward (R&F-B): similar à estratégia anterior R&F-F, porém, a sequência de resolução dos subproblemas MIP^r é iniciada em ordem cronológica inversa e a resolução iniciasse pelo subproblema MIP^R finalizando com a resolução do subproblema MIP^1 .

Estratégia relax-and-fix overlapping (R&F-O): esta estratégia baseia-se na partição do problema original em R períodos com sobreposição de partições. Dada uma partição r , as variáveis pertencentes as partições Q^r e Q^{r-1} , com $2 \leq r \leq R$ são mantidas binárias e as demais variáveis subsequentes a esses períodos são relaxadas. Na iteração seguinte, as variáveis da partição Q^{r-1} são fixadas, as variáveis dos subconjunto Q^r e Q^{r+1} mantidas binárias e as demais variáveis relaxadas. O

períodos subsequentes relaxadas. No próximo subproblema, as variáveis correspondentes aos períodos $r - 3$ e $r - 2$ são fixadas, as variáveis dos períodos $r - 1, r, r + 1$ e $r + 2$ são binárias e as demais variáveis subsequentes relaxadas, assim sucessivamente até o último subproblema ser resolvido.

IV. RESULTADOS

Foram utilizadas 23 instâncias proposta por [14] para o PCARP, sendo estas adaptadas de [25]. As instâncias possuem periodicidades que variam de 2 a 4, com o número de veículos entre 1 e 6. Maiores detalhes das instâncias podem ser vistos em [14]. As estratégias propostas foram implementadas no Microsoft Visual Studio 2015, utilizando pacote de otimização Gurobi 7.0.

Para avaliação do desempenho da heurística como método de solução para o PCARPMC, foram executadas as 23

instâncias no solver Gurobi 7.0 na configuração *default*, com tempo limite de 1.440 minutos (24 horas), após esse período caso a instância não tenha sido resolvida em sua otimalidade, toma-se a melhor solução incumbente. Para cada instância R&F (Z_H) e a melhor solução fornecida pelo *software* Gurobi 7.0 (Z_G) com um tempo limite de 24 horas. Este desvio é calculado da seguinte forma:

$$Desvio = \frac{Z_H - Z_G}{Z_G} \quad (10)$$

Os resultados podem ser vistos na Tabela I, em que a primeira coluna é referente à instância e as colunas subsequentes à estratégia, sendo que essas são subdivididas em colunas de solução (Z) e desvio em relação à solução do modelo executado no solver por 24h. O símbolo “-” indica que a estratégia gerou subproblemas infactíveis, não sendo capaz de determinar uma solução viável para o problema original, enquanto que, o símbolo “*” indica que o problema esgotou o tempo estabelecido em uma determinada iteração. O tempo limite para a execução da heurística foi estabelecido em 1 minuto por iteração.

A estratégia R&F-F apresentou o pior desempenho, conseguindo encontrar apenas uma solução factível e de baixa qualidade. Esgotou o tempo estabelecido para 3 problemas e, para os demais, gerou subproblemas infactíveis. A estratégia R&F-B esgotou o tempo limite de execução em 4 instâncias, porém, apresentou desempenho superior à primeira estratégia conseguindo resolver 7 das 23 instâncias, sendo 0,01 o menor desvio e 17,46 o pior desvio em relação a melhor solução. A média do desvio da heurística foi de 5,68.

A estratégia R&F-O atingiu performance melhor que as duas estratégias anteriores, alcançando 5 soluções viáveis com desvio igual a 0, sendo que 4 instâncias exauriram o tempo estabelecido por iteração. A estratégia R&F-O2 obteve 10 soluções viáveis, apresentando desvio igual a 0 para os problemas gdb13, gdb14 e gdb16, enquanto os problemas gdb15, gdb19 e gdb21 apresentaram desvio igual ou inferiores a 0,04, indicando que as soluções encontradas estão muito próximas da solução determinada pelo solver. A heurística apresenta média do desvio de 10,79. Observa-se que 5 problemas esgotaram o tempo estabelecido, não sendo capaz de determinar uma solução viável.

O tempo médio gasto por cada estratégia foi: 2,05 minutos para R&F-F; 3,01 minutos para a estratégia R&F-B; 7,5 minutos para R&F-O; 7,34 minutos para R&F-O2; e 1418,86 minutos para o método exato. Observa-se que a resolução pelo *software* GUROBI evidencia, maior tempo médio de execução que às estratégias propostas. Esses resultados já eram previstos, uma vez que as estratégias possuem tempo predefinido 1 minuto por iteração, e as estratégias tiveram um alto índice de problema infactíveis.

A Tabela II descreve para cada estratégia quais instâncias obtiveram desvio igual a 0 e inferior ou igual 0,04 em relação a solução determinada pelo método exato e seus respectivos tempos de execução.

É possível avaliar a qualidade das heurísticas no que concerne ao tempo. Observa-se que as estratégias R&F-B, R&F-O e R&F-O2 apresentam os menores tempos. Em contrapartida, estas possuem o maior número de problemas infactíveis e soluções com desvio mais elevado. O menor tempo de execução é de 0,38 min (23 segundos) referente à resolução do problema gdb19 pela estratégia R&F-O.

TABELA II. DESVIO E TEMPOS PARA AS MELHORES ESTRATÉGIAS

Estratégia	$D = 0$		$D \leq 0,04$	
	t (min)		t (min)	
R&F-B			gdb13	0,75
			gdb14	0,60
			Gdb23	9,20
R&F-O	Gdb6	4,33		
	Gdb13	6		
	gdb16	11,10		
	gdb17	15,67		
	gdb19	0,38		
R&F-O2	gdb13	2,28	gdb15	11,93
	gdb14	3,05	gdb19	2,53
	gdb16	7,25	gdb21	7,20

V. CONCLUSÕES

O PCARP possui uma natureza *NP-hard* e quanto maior for a rede (grafo) e o número de restrições, sejam estas vinculadas à capacidade, tempo ou periodicidades, mais difícil é determinar uma solução. Tal dificuldade é compensada pelo ganho que o modelo pode trazer ao problema.

Nesse trabalho foi considerado o modelo proposto em [16] e como método de solução foi utilizado a heurística relax-and-fix como método de solução para PCARPMC, especificamente as estratégias descritas em [24].

Um dos fatores que determinam o sucesso da heurística R&F é a escolha das partições das variáveis do problema, para o PCARPMC foi considerado apenas a partição das variáveis em relação ao período. Os resultados computacionais mostraram que a decomposição por período aqui adotado apresentaram grande número de problemas infactíveis. Mas em contrapartida foi capaz de determinar soluções com desvio igual a zero com um tempo computacional inferior ao método exato.

Nota-se que a heurística R&F pode ser uma boa estratégia para de terminar soluções viáveis para o PCARPMC, mas faz-se necessário um estudo para criar novas formas de partição para o modelo, criando assim novas estratégias para R&F com objetivo de diminuir o número instâncias infactíveis.

REFERÊNCIAS

- [1] B.C. Claudio. Aspectos práticos da aplicação de modelos de roteirização de veículos a problemas reais. *Transportes*, v. 8, n.2, p. 51-74, 2000.
- [2] I. M. Monroy, C.A. Amaya and A. Philippe. The periodic capacitated arc routing problem with irregular services. *Discrete Applied Mathematics*, v. 161, p. 691–701, 2013.
- [3] C.G. Marcos. *Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

- [4] M. Edward. The Chinese Postman Problem for Mixed Networks. *Management Sciences*, v. 25, n. 7, 1979.
- [5] D. Moshe, S. Helman and T. Pierre. Postman Tour on a Graph with Precedence Relation on Arcs. *Networks*, v. 17, p. 283-294, 1987.
- [6] C.A. ORLOFF. A Fundamental Problem in Vehicle Routing. *Networks*, v. 4, p. 35-64, 1974.
- [7] L.G. Bruce and W.T. Richard. Capacitated Arc Routing Problem. *Networks*, v. 11, p. 305-315, 1981.
- [8] L. Philippe, P. Christian and R. Washiba. Evolutionary Algorithms for Multiperiod Arc Routing Problems. In: *IPMU 2002 (Ed.); 9th Int. Conf. On Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based systems*. Anais... p.1-8, 2002.
- [9] L. Philippe, P. Christian and R. Washiba. Evolutionary algorithms for periodic arc routing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 165, p. 535-553, 2005.
- [10] C. Feng, L. Nacima and P. Christian. A Scatter Search for the periodic capacitated arc routing problem. *European Journal of Operational Research*, v. 169, p. 586-605, 2006.
- [11] M. Fabien, T. Martin and L. André. Road network monitoring: algorithms and a case study. *Computers & Operations Research*, v. 33, n. 12, p. 3494-3507, 2006.
- [12] R. P. Juan, L. André and G. Michel. Adaptive Large Neighborhood Search for the Periodic Capacitated Arc Routing Problem with Inventory Constraints. *Network*, v. 64, p. 125-139, 2014.
- [13] R. P. Juan, L. André and G. Michel. Location arc routing problem with inventory constraints. *Computers & Operations Research*, v. 76, p. 84-94, 2016.
- [14] B.V. Guilherme. Proposta de um Modelo Matemático para o Problema de Roteamento em Arcos Capacitado e Periódico. 95 f. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014.
- [15] B.V. Guilherme and S.T. Cassius. Problema de Roteamento em Arcos Capacitado e Periódico Aplicado a um Contexto Real. *Revista Produção Online, Florianópolis*, Vol. 15, n. 3, p. 1080-1098, jul./set. 2015.
- [16] B. V. Guilherme. Iterative Restricted Search Space Aplicado ao Problema de Roteamento em Arcos Capacitados e Periódico com Movimento Contínuos. 91 f. Qualificação (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Não publicado.
- [17] H. Shan-Huen and L. Tsan-Hw. Using Ant Colony Optimization to solve Periodic Arc Routing Problem with Refill Points. *Journal of Industrial and Production Engineering*, v. 31, n. 7, p. 441-451, 2014.
- [18] W.A. Laurence. *Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Integer Programming*. John Wiley & Sons, 1998.
- [19] C.H. Luiz. Um método híbrido para o problema de dimensionamento de lotes. 69 f. Dissertação (Mestrado em Ciências). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.
- [20] F. Deisemara. Abordagens para o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes da produção. 253 f. Tese (Doutorado em Engenharia da Produção). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2007.
- [21] F. Deisemara, M. Reinald and R. Socorro. Relax and fix heuristics to solve one-stage one-machine lot-scheduling models for small-scale soft drink plants. *Computers & Operations Research*, v. 37, n. 4, p. 684-691, 2010.
- [22] Y. POCHET and W.A. Laurence. *Production Planning by Mixed Integer Programming*. Science Business Media, Inc, New York, Springer, 2006.
- [23] M. C.C. Livia and S.O. Maristela. Heurísticas relax-and-fix para o problema de dimensionamento de lotes com janelas de tempo de produção. *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2012.
- [24] D.O. Jailson and T.S. Cassius. Estratégias relax-and-fix na solução de um problema de roteamento em arcos capacitado e periódico. *VI Congresso Brasileiro de Engenharia de Produção*, 2016.
- [25] B.L. Golden and J.S. Dearmon. Computational experiments with algorithms for a class of routing problems. *Computers & Operations Research*, v. 10, n. 1, p. 47-59, 1983.