



Simpósio de Métodos
Numéricos em Engenharia

25 a 27 de outubro, 2017

Uma adaptação do método SPH inverso com a função núcleo Dome-shaped modificada

Luciano Pereira da Silva

PósMAC

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Presidente Prudente - SP, Brasil

luc_cogo@ig.com.br

Messias Meneguette Junior

Departamento da Matemática e Computação - DMC

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Presidente Prudente - SP, Brasil

messias@fct.unesp.br

Resumo—O filtro SPH inverso de alta ordem, recente na literatura, consiste na determinação de um polinômio capaz de recuperar ordens mais altas de consistência do método SPH tradicional. Por meio de ideias baseadas na literatura clássica, verificou-se que a função núcleo *Dome-shaped* quadrática possui uma formulação muito semelhante ao método do filtro SPH inverso. Dessa forma, foi possível determinar um novo polinômio restaurador da consistência por meio de uma adaptação na função quadrática.

Palavras-chave—SPH, Filtro Inverso, Alta Ordem, Desordem, Consistência.

I. INTRODUÇÃO

Atualmente, devido ao grande avanço tecnológico o uso dos métodos de partículas vem ganhando espaço nas simulações de escoamento de fluido. O primeiro método de partículas desenvolvido foi o *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) para simular problemas astrofísicos. Desde então tem sido estudado e melhorado para ser aplicado em uma variedade de problemas, incluindo as equações de Navier-Stokes.

A utilização continua sendo objeto de estudos em crescente atividade na comunidade acadêmica [1], [2]. O diferencial aqui proposto, é a utilização de partículas fixas mas desordenadas, ou seja, considera-se a desordem canônica [2], que estabelece uma reconfiguração das partículas uniformemente distribuídas por meio de uma perturbação leve que muda randomicamente a posição de cada uma delas.

II. REPRESENTAÇÃO INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO

A representação integral de uma função é aproximada pela soma dos valores das partículas vizinhas mais próximas. Assim, a ideia de discretização então considera um conjunto de partículas para a representação do meio. Para viabilizar isto, é necessário uma aproximação para a função Delta de Dirac, que é denominada núcleo. O conceito de representação integral de uma função $f(\mathbf{x})$ utilizado no método SPH começa a partir da seguinte identidade:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (1)$$

onde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida num domínio aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{x} \in \Omega$, e f é contínua em Ω . Essa representação é feita através da convolução de f com a distribuição Delta de Dirac, dada por:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \begin{cases} \infty, & \mathbf{x} = \mathbf{x}' \\ 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \end{cases} \quad (2)$$

A equação (1) permite que uma função f contínua em Ω possa ser representada em uma forma integral (cf. [8]).

Substituindo a Delta de Dirac por uma função núcleo $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)$ centrada no ponto \mathbf{x} , tem-se uma aproximação:

$$f(\mathbf{x}) \cong \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}', \quad (3)$$

sendo h o comprimento de suavização (*smoothing length*) que estabelece a maior distância permitida entre as partículas \mathbf{x} e \mathbf{x}' . Em geral considera-se h multiplicado por um escalar k não-negativo.

A notação $\langle \rangle$ representa a aproximação para a função:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \quad (4)$$

Assim, é dito existir uma aproximação para f por meio da representação integral com base na função núcleo W suficientemente suave.

III. APROXIMAÇÃO UTILIZANDO PARTÍCULAS

Assumindo que o meio é discreto, ou seja, formado por um número finito de partículas que possuem massa e ocupam um volume no espaço, a integral em (4) é aproximada por meio de

um somatório sobre as partículas que se encontram contidas no domínio.

Uma propriedade exigida da função núcleo é que tenha um suporte compacto, então a aproximação é feita apenas sobre a sub região referente ao suporte do núcleo. Define-se o suporte compacto da função núcleo ao conjunto V_i centrado em \mathbf{x}_i , onde:

$$V_i = \{\mathbf{x}_j, \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \leq kh\}, \quad (5)$$

sendo $V_i \subset \Omega$, k um fator de escala e $j = 1 \dots N_i$, onde N_i representa o número de partículas que satisfazem a restrição $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \leq kh$.

Considerando um contínuo de partículas, ao substituir o volume infinitesimal $d\mathbf{x}'$ em (4) na posição da j -ésima partícula pelo volume Δv_j ocupado pela partícula \mathbf{x}_j , pode-se considerar:

$$\langle f(\mathbf{x}_i) \rangle = \sum_{j=1}^{N_i} f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j; h) \Delta v_j. \quad (6)$$

Sabendo que o volume da partícula Δv_j pode ser representado pela razão entre a massa m_j e a densidade ρ_j , (6) pode ser reescrita como:

$$\langle f(\mathbf{x}_i) \rangle = \sum_{j=1}^{N_i} f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j; h) \frac{m_j}{\rho_j}. \quad (7)$$

Dessa forma, (7) gera uma aproximação para f em cada um dos pontos do domínio discretizado por meio de um conjunto de partículas isoladamente recrutadas no suporte compacto da função núcleo.

IV. FUNÇÃO NÚCLEO SPH: DEFINIÇÃO E MODELO

O núcleo SPH é de extrema importância, pois não somente determina o padrão da aproximação, como também define a dimensão do suporte das partículas, determina a consistência e, a precisão de ambas as aproximações: integral e por partículas. Adota-se como modelo de núcleo SPH [7], [8], [11] a função definida da seguinte forma:

$$W(\phi) = \frac{\alpha_n}{h^n} w(\phi), \quad (8)$$

onde

$$\phi_{ij} = \frac{r_{ij}}{h} = \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}{h}.$$

A variável r representa a distância entre duas partículas, h o comprimento de suavização (fixo), w é uma função definida sobre \mathbb{R}^+ , suficientemente suave e α_n uma constante de normalização específica para uma, duas ou três dimensões, ou seja, $n = 1, 2, 3$, conforme [10].

Para $n = 1$, a derivada primeira da função núcleo é expressa da seguinte forma:

$$W'(\phi) = \frac{\alpha_n}{h^2} w'(\phi). \quad (9)$$

De maneira análoga ao caso anterior, as derivadas de ordem superiores podem ser obtidas por meio da seguinte relação:

$$W^{(k)}(\phi) = \frac{\alpha_n}{h^{n+k}} w^{(k)}(\phi). \quad (10)$$

Para os casos bidimensional e tridimensional procede-se analogamente.

V. CONCEPÇÃO NUMÉRICA DA DISTRIBUIÇÃO DAS PARTÍCULAS

Com base em uma distribuição uniforme, define-se um modelo de perturbação canônica [2] sob influência de um raio R , da seguinte forma:

$$R = \eta \Delta x \quad (11)$$

onde $\eta \in [0, 0.5[$ e Δx é a distância uniforme entre as partículas não perturbadas. Dessa forma, a distribuição perturbada consiste em transladar as partículas uniformemente distribuídas para posições geradas de modo randômico, de tal forma que permaneçam contidas na região limitada pela circunferência de raio R , conforme mostrado na Fig. 1.

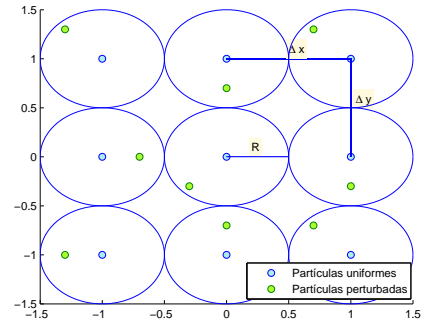


Figura 1. Perturbação canônica de partículas com distância irregular, randômica e limitada por um raio R .

Uma característica importante desse método de distribuição das partículas é o tamanho de R . Sendo ele constituído pelo produto $\eta \Delta x$, isso impede que aconteça uma sobreposição entre duas partículas vizinhas.

VI. O PROBLEMA DE INCONSISTÊNCIA DAS PARTÍCULAS NO MÉTODO SPH

Similar ao conceito de consistência no tradicional Método dos Elementos Finitos, se uma aproximação SPH pode reproduzir um polinômio de ordem n exatamente, a aproximação SPH é dita de ordem n ou consistência C^n .

Um grande problema para o método seria o surgimento de uma função núcleo não-positiva, que é geralmente necessária para simular problemas hidrodinâmicos. Uma função núcleo negativa (mesmo parcial) pode resultar em variáveis não físicas, tais como massa negativa, densidade negativa, etc. No entanto, uma função núcleo não-negativa não vai satisfazer M_2 (ver [4]), sendo assim, uma aproximação do núcleo SPH por meio de uma função não-negativa é de segunda ordem na

maioria dos casos, conforme visto anteriormente. Em outras palavras, a consistência do núcleo SPH usando uma função não-negativa é menor do que segunda ordem [7], [8].

Se as aproximações do núcleo SPH são realizadas para as regiões truncadas por fronteiras, não será possível reproduzir exatamente o polinômio e suas derivadas, uma vez que M_0 e M_1 não são satisfeitos nessas regiões. Portanto, o método SPH original tem a consistência C^1 do núcleo para as regiões internas. No entanto, para as regiões de fronteira, não tem sequer a consistência C^0 [7].

Em suma, a inconsistência de partículas é originada a partir da discrepância entre o núcleo SPH contínuo e a aproximação por partículas. Todavia, partículas na fronteira, partículas distribuídas de maneira desordenada e variação do comprimento de suavização podem produzir inconsistência no processo de aproximação por partículas.

VII. PARTÍCULA INCONSISTENTE

O SPH original com uma função núcleo convencional tem consistência C^0 e C^1 para regiões internas. A consistência do núcleo está relacionada com sua aproximação no mundo contínuo, dessa forma, se alguma das condições de consistência do núcleo for satisfeita, isso não significa necessariamente que a aproximação correspondente no mundo discreto também irá satisfazer. Esta discrepância entre a aproximação por partículas e a aproximação do núcleo é denominada como inconsistência de partículas [6].

As formas discretas dos momentos M_0 e M_1 são:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j; h) \Delta v_j &= 1 \\ \sum_{j=1}^N (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j; h) \Delta v_j &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

A caracterização do problema é devida à dificuldade em cumprir as condições de consistência discretas, conforme relatado em [4].

VIII. RESTAURAÇÃO DA CONSISTÊNCIA DAS PARTÍCULAS

A. Abordagem CSPM

Estudos mais recentes relatam que o método SPH original não tem sequer a consistência C^0 e C^1 nas aproximações por partículas. Diferentes abordagens têm sido utilizadas para melhorar esse problema e, portanto, tratar a inconsistência para melhorar a precisão da aproximação SPH. Algumas delas envolvem a reconstrução de uma nova função núcleo, de modo a satisfazer as condições de consistência na forma discreta. No entanto, essas abordagens geralmente não são aceitas para simulações em hidrodinâmica porque a função núcleo pode ser negativa, não-simétrica, e não monótona decrescente. Dessa forma, o tratamento da inconsistência levará em consideração a função núcleo em sua forma convencional.

Uma abordagem inicial [9] baseia-se na propriedade anti-simétrica da derivada de uma função núcleo:

$$\sum_{j=1}^N W_{i,\alpha} \Delta v_j = 0. \quad (13)$$

onde α é o índice de dimensão indexada. Portanto, quando aproximada a derivada de uma função f , a aproximação por partículas pode ser reescrita como:

$$f_{i,\alpha} = \sum_{j=1}^N (f_j - f_i) W_{i,\alpha} \Delta v_j \quad (14)$$

ou

$$f_{i,\alpha} = \sum_{j=1}^N (f_j + f_i) W_{i,\alpha} \Delta v_j \quad (15)$$

Note que (13) não cumpre necessariamente o mesmo valor que sua contraparte na forma contínua $\int_{\Omega} W_{i,\alpha} d\mathbf{x} = 0$ (válida para regiões internas). Esta é também uma manifestação da inconsistência das partículas. Portanto, (14) e (15), na verdade, utilizam a inconsistência das partículas na aproximação da derivada da função núcleo restauradora, ou equilibra a inconsistência das partículas na aproximação das derivadas de uma função, e assim, melhora a precisão das aproximações.

Com base em expansão em série de Taylor na aproximação SPH de uma função, em [3] desenvolveu-se o então chamado *Corrective Smoothed Particle Method* - CSPM. No espaço unidimensional, o CSPM pode ser apresentado brevemente, conforme mostrado a seguir.

Supondo que f seja suficientemente derivável, pode-se expandir $f(x)$ em série de Taylor ao redor do ponto x_i .

$$f(\mathbf{x}) = f_i + (x - x_i) f_{i,x} + \frac{(x - x_i)^2}{2!} f_{i,xx} + \dots \quad (16)$$

Multiplicando ambos os lados de (16) pela função núcleo W e integrando ao longo de todo o domínio computacional, tem-se

$$\begin{aligned} \int f(x) W_i(x) dx &= f_i \int W_i(x) dx + f_{i,x} \int (x - x_i) W_i(x) dx \\ &+ \frac{f_{i,xx}}{2} \int (x - x_i)^2 W_i(x) dx + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Se os termos envolvendo derivadas em (17) são negligenciados, uma aproximação do núcleo corretor para a função $f(\mathbf{x})$ na posição da partícula \mathbf{x}_i é obtida da seguinte maneira:

$$f_i = \frac{\int f(x) W_i(x) dx}{\int W_i(x) dx}. \quad (18)$$

Para uma função núcleo convencional (não-negativa e simétrica), o segundo termo RHS de (17) é nulo para a região interna e não-nulo para a região de fronteira. Portanto, a aproximação do núcleo corretor expressa em (18) uma precisão C^2 para a região interna e C^1 para região de fronteira.

Comparando as equações (18) e (3), verifica-se que para a região interna, as aproximações usando a função núcleo convencional e CSPM são as mesmas, devido ao cumprimento da condição de normalização (na forma contínua). Para as

regiões de contorno, uma vez que a integral da função núcleo é truncada na fronteira, a condição de normalização não pode ser satisfeita. Assegurando o denominador não-unitário, o CSPM restaura a consistência C^0 do núcleo. Por conseguinte, assumindo que a integral da função núcleo nas regiões de fronteira sempre será unitária, como nas regiões internas, já é a razão suficiente para justificar que o SPH original não tem a consistência C^0 do núcleo.

A forma discreta de (18) desprezando os termos envolvendo as derivadas, assim como no realizado anteriormente, é dada por:

$$f_i = \frac{\sum_{j=1}^N f_j W_{ij} \Delta v_j}{\sum_{j=1}^N W_{ij} \Delta v_j}. \quad (19)$$

A aproximação por partículas do segundo termo RHS de (16) não é necessariamente nula, mesmo para as partículas internas. Isso ocorre devido à inconsistência das partículas. Portanto, estritamente falando, a aproximação por partículas expressa em (19) é consistência C^0 , tanto para as partículas internas quanto para partículas de fronteira. Apenas se as partículas estiverem uniformemente distribuídas, a aproximação do segundo termo RHS de (16) será nula. Neste caso, a aproximação por partículas expressa em (19) é consistência C^1 para as partículas internas.

Substituindo $W_i(x)$ em (16) por $W_{i,x}$ e desprezando o termo da derivada de segunda ordem e superiores, uma aproximação do núcleo corretor para a primeira derivada pode ser escrita:

$$f_{i,x} = \frac{\int (f(x) - f(x_i)) W_{i,x}(x) dx}{\int (x - x_i) W_{i,x}(x) dx}. \quad (20)$$

A forma discreta de (20) é dada por:

$$f_{i,x} = \frac{\sum_{j=1}^N (f_j - f_i) W_{i,x} \Delta v_j}{\sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) W_{i,x} \Delta v_j}. \quad (21)$$

De maneira similar, a aproximação CSPM do núcleo para as derivadas são de consistência C^1 para regiões internas, mas C^0 para partículas da região de fronteira. Exceto para os casos com partículas internas e uniformemente distribuídas, as aproximações CSPM de partículas para as derivadas são consistência C^0 , tanto para partículas internas, quanto para as da região de fronteira.

B. Abordagem FPM

O *Finite Particle Method* - FPM gera de forma simultânea a restauração da consistência das partículas para aproximar uma função e suas derivadas. Revendo a expansão da série de Taylor de uma função $f(\mathbf{x})$ no espaço multidimensional, tem-se:

$$f(\mathbf{x}) = f_i + (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) f_{i,\alpha} + \frac{(\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha)(\mathbf{x}^\gamma - \mathbf{x}_i^\gamma)}{2!} f_{i,\alpha\gamma} + \dots, \quad (22)$$

onde α e γ representam os índices de dimensão indexadas.

Multiplicando ambos os lados de (23) pela função núcleo $W_i(x)$ e sua derivada de primeira ordem $W_{i,\beta}$, e além disso desprezando as derivadas de segunda ordem e superiores, tem-se:

$$\int f(\mathbf{x}) W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f_i \int W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + f_{i,\alpha} \int (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (23)$$

$$\int f(\mathbf{x}) W_{i,\beta} d\mathbf{x} = f_i \int W_{i,\beta} d\mathbf{x} + f_{i,\alpha} \int (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{i,\beta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (24)$$

O termo β novamente representa o índice de dimensão indexada. Observa-se que existem duas equações e duas incógnitas (f_i e $f_{i,\alpha}$), dessa forma, as equações (23) e (24) compõem, portanto, um sistema linear que pode ser facilmente resolvido.

As aproximações para f_i e $f_{i,\alpha}$, na forma contínua são expressas por:

$$f_i = \frac{\begin{vmatrix} \int f(\mathbf{x}) W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} & \int (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \int f(\mathbf{x}) W_{i,\beta} d\mathbf{x} & \int (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{i,\beta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \int W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} & \int (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \int W_{i,\beta} d\mathbf{x} & \int (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{i,\beta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{vmatrix}} \quad (25)$$

$$f_{i,\alpha} = \frac{\begin{vmatrix} \int W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} & \int f(\mathbf{x}) W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \int W_{i,\beta} d\mathbf{x} & \int f(\mathbf{x}) W_{i,\beta} d\mathbf{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \int W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} & \int (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \int W_{i,\beta} d\mathbf{x} & \int (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{i,\beta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{vmatrix}}. \quad (26)$$

As equações (25) e (26) podem ser reescritas na forma discreta da seguinte maneira:

$$f_i = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^N f_j W_{ij} \Delta v_j & \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{ij} \Delta v_j \\ \sum_{j=1}^N f_j W_{ij,\beta} \Delta v_j & \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{ij,\beta} \Delta v_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^N W_{ij} \Delta v_j & \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{ij} \Delta v_j \\ \sum_{j=1}^N W_{ij,\beta} \Delta v_j & \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{ij,\beta} \Delta v_j \end{vmatrix}} \quad (27)$$

$$f_{i,\alpha} = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^N W_{ij} \Delta v_j & \sum_{j=1}^N f_j W_{ij} \Delta v_j \\ \sum_{j=1}^N W_{ij,\beta} \Delta v_j & \sum_{j=1}^N f_j W_{ij,\beta} \Delta v_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^N W_{ij} \Delta v_j & \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{ij} \Delta v_j \\ \sum_{j=1}^N W_{ij,\beta} \Delta v_j & \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{ij,\beta} \Delta v_j \end{vmatrix}}. \quad (28)$$

Ao determinar (25) e (26) as aproximações do núcleo contínuo, bem como (27) e (28) para as aproximações por partículas, nenhuma modificação na função núcleo convencional é efetuada. Nas equações (23) e (24), os termos relacionados com a função e a primeira derivada são mantidos, apenas os termos relacionados com a derivada de segunda ordem e superiores são negligenciados. Portanto, as aproximações do núcleo resultantes do processo são de segunda ordem de precisão (ou C^1), tanto para as partículas internas quanto nas regiões de fronteira.

As aproximações por partículas, modelo discreto, são também de segunda ordem de precisão (ou C^1), tanto para as

partículas internas quanto para as das regiões de fronteira, independente da distribuição uniforme ou perturbada. Em outras palavras, FPM tem consistência C^1 nas aproximações contínuas e discretas. A consistência do núcleo na forma contínua ou discreta do FPM pode ser melhorada se a segunda derivada ou superiores forem mantidas na expansão em série de Taylor em (21). Em geral, se a k -ésima derivada for negligenciada, isso significa que a aproximação do núcleo (modelo contínuo) e por partículas (modelo discreto) serão de $k + 1$ ordem de precisão ou consistência C^k [7].

O FPM compartilha algumas características comuns com CSPM uma vez que ambos usam expansão em série de Taylor sobre as aproximações do núcleo SPH originais. No entanto, o FPM é claramente diferente da CSPM.

IX. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para analisar ainda mais a consistência na aproximação por partículas, realiza-se estudos numéricos para verificar de modo prático os métodos de restauração da consistência. Para evitar influências da região de fronteira, os testes destinam-se apenas às regiões do domínio onde a função núcleo não sofrerá truncamento.

Os resultados das aproximações das funções serão obtidos usando o SPH original, e também os dois métodos de restauração de consistência, CSPM e FPM. A função núcleo utilizada para as aproximações será definida logo abaixo, conforme visto em [7].

$$W(R) = \alpha_d \begin{cases} \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2}R^3 & 0 \leq R < 1 \\ \frac{1}{6}(2 - R)^3 & 1 \leq R < 2 \\ 0 & R \geq 2 \end{cases}, \quad (29)$$

onde $\alpha_1 = 1/h$ e $\alpha_2 = 15/7\pi h^2$ para uma e duas dimensões respectivamente.

A. Zero ordem de consistência (C^0)

A C^0 consistência representa a capacidade de reproduzir ou, em outras palavras, aproximar uma função constante. Para o teste numérico considera-se arbitrariamente a função constante $f(x) = 1$ num intervalo $[0, 1]$.

A Tabela I mostra o erros relativos obtidos na aproximação dessa função, para isso utilizou-se 10 partículas distribuídas uniformemente entre $x = 0.05$ e $x = 0.95$, sendo $\Delta x = 0.1$. O volume associado a cada partícula é $\Delta v = 0.1$ fixo e o comprimento de suavização é adotado como sendo, $h = k\Delta v$, onde o fator escala $k = 1.5$ e $\alpha = 1$.

Os resultados mostraram que a influência do truncamento da função núcleo na fronteira afetou as cinco primeiras e cinco últimas partículas, pois as aproximações para as demais partículas de mantiveram-se constantes. Observa-se também o ganho de consistência com os métodos de restauração, pois ambos conseguiram zerar o erro relativo.

B. Primeira ordem de consistência (C^1)

A C^1 consistência representa a capacidade de reproduzir ou, em outras palavras, aproximar uma função linear. Para o teste numérico considera-se arbitrariamente a função linear $f(x) = x$ num intervalo $[0, 1]$.

Tabela I
RESULTADOS OBTIDOS NA APROXIMAÇÃO PARA $f(x) = 1$ COM
 $h = 1.5\Delta v$.

Partículas	Solução Exata	Erro(SPH)	Erro(CSPM)	Erro(FPM)
1	1.0	0.7788	0	0
2	1.0	0.5577	0	0
3	1.0	0.5577	0	0
4	1.0	0.5577	0	0
5	1.0	0.5577	0	0
6	1.0	0.5577	0	0
7	1.0	0.5577	0	0
8	1.0	0.5577	0	0
9	1.0	0.5577	0	0
10	1.0	0.7788	0	0

A Tabela II mostra o erros relativos obtidos na aproximação dessa função, para isso utilizou-se 10 partículas distribuídas uniformemente entre $x = 0.05$ e $x = 0.95$, sendo $\Delta x = 0.1$. O volume associado a cada partícula é $\Delta v = 0.1$ fixo e o comprimento de suavização é adotado como sendo, $h = 1.2k\Delta v$, onde o fator escala $k = 1.7$.

Tabela II
RESULTADOS OBTIDOS NA APROXIMAÇÃO PARA $f(x) = x$ COM
 $h = 1.2k\Delta v$.

Partículas	Solução Exata	Erro(SPH)	Erro(CSPM)	Erro(FPM)
1	0.05	0.0092	0.1023	0
2	0.15	0.0609	0.0023	0
3	0.25	0.1012	0.0000	0
4	0.35	0.1408	0.0000	0
5	0.45	0.1804	0	0
6	0.55	0.2201	0	0
7	0.65	0.2597	0	0
8	0.75	0.2993	0.0000	0
9	0.85	0.3389	0.0023	0
10	0.95	0.3965	0.1023	0

Os resultados da Tabela II mostram a dificuldade do método SPH original em aproximar uma função linear, isso ocorre tanto para as partículas sob influência do truncamento da função núcleo na fronteira, quanto para as partículas internas. É possível notar que o CSPM apresenta limitações nas regiões de fronteira, pois os erros locais mostram que a consistência não foi completamente recuperada, já no FPM a consistência foi recuperada tanto para partículas internas, quanto para as partículas na região de fronteira. Esses erros na região de fronteira acontecem porque há ausência de partículas dentro do suporte compacto, de modo que, se houvesse duas vezes mais partículas nessas regiões a consistência seria recuperada.

Estendendo a função linear para o caso bidimensional, tem-se, $f(x, y) = x + y$, num domínio de $[0, 1] \times [0, 1]$. Os parâmetros utilizados foram $\Delta v = 0.1$, $k = 1.5$, $h = k\Delta v$ e 441 partículas distribuídas uniformemente no domínio.

Os resultados apresentados na Tabela III foram obtidos para partículas internas, ou seja, sem a influência das partículas que estão na região de fronteira, enquanto os da Tabela IV consideram também as partículas de fronteira.

A Fig. 2 mostra as aproximações numéricas para a função linear, mas agora com partículas fantasmas na região da fronteira.

Tabela III

ERROS DE APROXIMAÇÃO DA FUNÇÃO LINEAR $f(x, y) = x + y$ LIVRE DE FRONTEIRA.

Erros	SPH	CSPM	FPM
Mínimo erro	0.0740	0	0
Máximo erro	0.2019	$1.1102e - 15$	$2.8866e - 15$
Erro global	0.3856	$1.6967e - 08$	$2.6530e - 08$

Tabela IV

ERROS DE APROXIMAÇÃO DA FUNÇÃO LINEAR $f(x, y) = x + y$ COM FRONTEIRA.

Erros	SPH	CSPM	FPM
Mínimo erro	0.0467	0	0
Máximo erro	0.6420	0.1653	$2.7756e - 14$
Erro global	0.4427	0.2727	$5.5471e - 08$

Com os mesmos parâmetros utilizados no exemplo anterior, e agora aplicando uma perturbação canônica nas partículas, obtêm-se os resultados mostrados na Tabela V.

A Fig. 3 mostra duas soluções em cada gráfico, a colorida refere-se a solução numérica perturbada plotada sobre nós perturbados, entre outras palavras, $\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$, onde \bar{x} e \bar{y} sofreram uma perturbação canônica. Por outro lado, a cinza refere-se a solução numérica perturbada plotada sobre nós uniformes, ou seja, $\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$ mas plotados na forma (x, y, \bar{z}) .

Tabela V

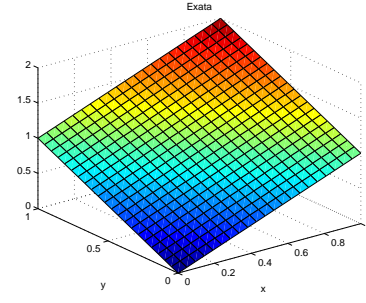
ERROS DE APROXIMAÇÃO DA FUNÇÃO LINEAR $f(x, y) = x + y$ COM $\eta = 0.3215$.

Erros	SPH	CSPM	FPM
Mínimo erro	$1.8130e - 04$	$7.0049e - 06$	$1.1102e - 16$
Máximo erro	0.6774	0.1635	0.0765
Erro global	0.4667	0.2708	0.1564

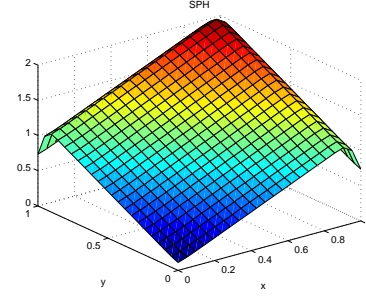
Testes numéricos para uma função quadrática $f(x, y) = x^2 + y^2$ foram executados, entretanto, como a segunda ordem de consistência C^2 não é cumprida, os erros de aproximação aumentam em grande proporção.

C. Método SPH inverso com a função núcleo Dome-shaped modificada

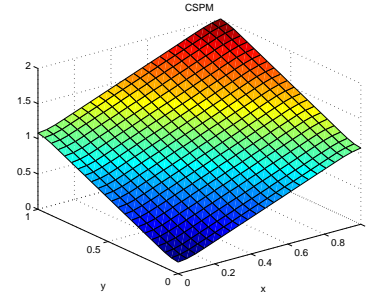
O método SPH inverso é muito recente na literatura, e consiste na determinação de um polinômio capaz de recuperar ordens mais altas de consistência do método SPH tradicional. Por meio de estudos em [5], [8] verificou-se que a função núcleo *Dome-shaped* quadrática possui uma formulação muito semelhante ao método SPH inverso. Dessa forma, após varios testes numéricos, foi possível comprovar a determinação de um polinômio restaurador de consistência. A validação do método foi baseada nas soluções SPH, CSPM, FPM, Inversa e também a comparação com a solução exata, uma vez conhecida é a melhor forma de validar o método. Sem complexidade de cálculos exaustivos, a primeira forma do polinômio pode ser definida. Toma-se como exemplo a construção de um polinômio de ordem $2p = n$, onde $n = 2$. Define-se $L^{2p}(R)$ exatamente como em [5], resultando em:



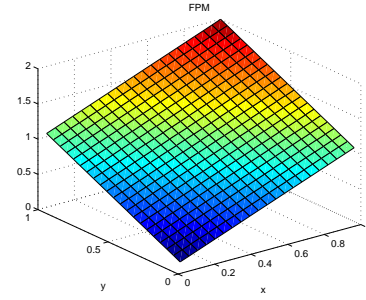
(a) Solução exata



(b) Solução SPH



(c) Solução CSPM

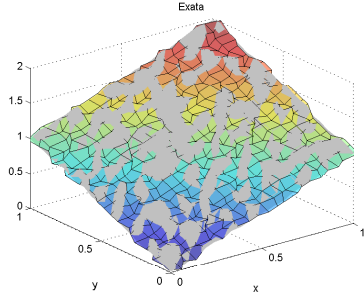


(d) Solução FPM

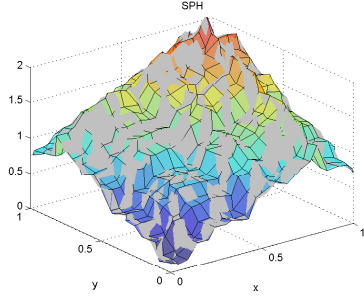
Figura 2. Aproximações para a função linear $f(x, y) = x + y$.

$$L^2(R) = a_0 + a_2 R^2 = a_0 + a_2 \left(\frac{r}{h}\right)^2. \quad (30)$$

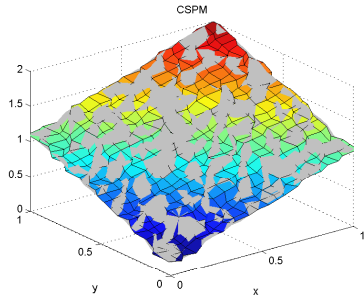
Note que ao expandir os coeficientes do polinômio, aquele que acompanha o termo linear e todos os de ordem ímpar são desprezados, isso ocorre devido a propriedade de simetria da função núcleo. É possível também que, procedendo desta



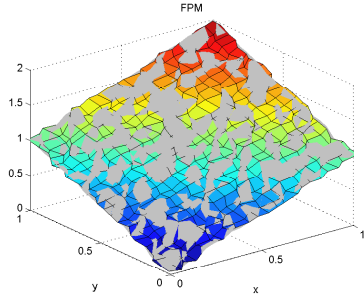
(a) Solução exata



(b) Solução SPH



(c) Solução CSPM



(d) Solução FPM

Figura 3. Aproximações para a função linear $f(x, y) = x + y$ com $\eta = 0.3215$.

maneira, em algum momento, as derivadas de W sejam impedidas de perder o suporte compacto. Esta informação é importante para o método SPH inverso que baseia-se na função W para obter o polinômio restaurador, segundo [8].

Para o modelo unidimensional, integra-se $L^{2p}(R)$ no intervalo $[-2, 2]$, ou seja, duas vezes de $[0, h]$, uma vez que

$R = \frac{r}{h}$ e r é o módulo da diferença entre duas partículas. Sendo assim, igualando a integral de $L^2(R)$ em relação a r com seu correspondente na condição de consistência (primeira linha de (12)), obtém-se:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^h (a_0 + a_2 \left(\frac{r}{h}\right)^2) dr &= 1 \\ 2ha_0 + \frac{2ha_2}{3} &= 1 \end{aligned} \quad (31)$$

A segunda condição de consistência de (12) impõe:

$$a_0 + a_2 = 0 \quad (32)$$

As equações (31) e (32) definem um sistema linear, cuja solução é $a_0 = \frac{3}{4h}$ e $a_2 = -\frac{3}{4h}$, com isso, obtém-se:

$$\begin{aligned} W(R) &= \frac{3}{4h} - \frac{3}{4h} R^2 \\ &= \frac{3}{4h} (1 - R^2) \\ &= \gamma_1 \frac{1}{h} (1 - R^2), \end{aligned} \quad (33)$$

onde $\gamma_1 = \frac{3}{4}$. Essa função W é conhecida como *Dome-shaped* quadrática. Em termos gerais ela é aplicada como sendo $W(R) = \frac{3}{4\pi h} (1 - R^2)$ onde $\frac{3}{4\pi}$ corresponde ao coeficiente de normalização unidimensional.

Por fim, $L^2(R)$ é definida conforme em (33) mas desprezando o termo γ_1 ,

$$L^2(R) = \frac{1}{h} (1 - R^2). \quad (34)$$

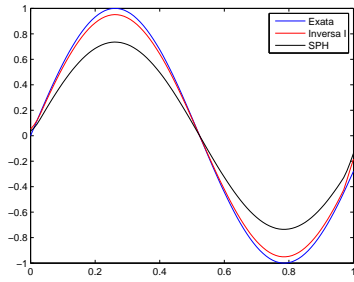
D. Resultados numéricos com o método SPH inverso

Para verificar os efeitos dos métodos, aplica-se ambos os casos na aproximação da função $f(x) = \text{sen}(6x)$, no intervalo $[0, 1]$, com 100 partículas, $k = 1$, $\alpha = 3.15$ e $h = \alpha \Delta x$ e para o método SPH tradicional foi aplicado a função núcleo cúbica definida em (29). Na Fig. 4 é possível visualizar as soluções numéricas para a função mencionada usando distribuição uniforme das partículas, já na Fig. 5 aplicou-se uma perturbação canônica $\eta = 0.3215$. Para efeitos de simplificação, adota-se as nomenclaturas (inversa I) para o método SPH inverso e (inversa II) para o método adaptado.

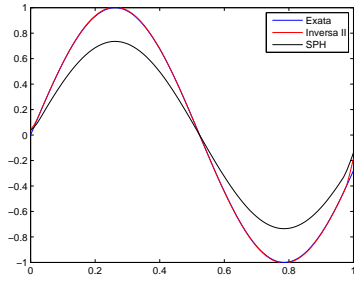
Tabela VI
ERROS DE APROXIMAÇÃO DA FUNÇÃO LINEAR $f(x) = \text{sen}(6x)$.

Perturbação	SPH	Inversa I	Inversa II
$\eta = 0$	0.2657	0.0527	0.0166
$\eta = 0.3215$	0.2963	0.1288	0.0728

Nos dois exemplos mostrados, a solução inversa II mostrou-se mais eficaz, conforme dados da Tabela VI. É importante ressaltar que tratamento algum de fronteira foi aplicado, e que ambos os métodos mostram as influências do truncamento da função núcleo nos gráficos.

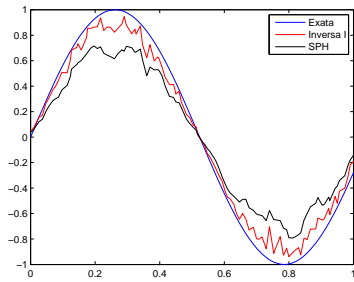


(a) Solução SPH inversa I

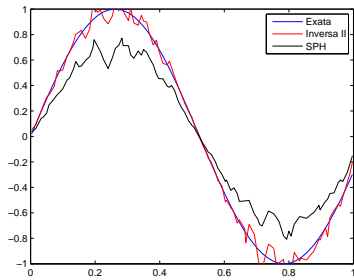


(b) Solução SPH inversa II

Figura 4. Aproximações para a função $f(x) = \text{sen}(6x)$.



(a) Solução SPH inversa I



(b) Solução SPH inversa II

Figura 5. Aproximações para a função $f(x) = \text{sen}(6x)$ com perturbação $\eta = 0.3215$.

X. CONCLUSÃO

Em CSPM, as aproximações de uma função e suas derivadas são sequencialmente calculadas, embora as mesmas ordens de derivada sejam resolvidas simultaneamente. No FPM, uma

função e todas as suas derivadas são simultaneamente calculadas.

Em CSPM, derivadas de ordem mais baixas são inerentes nas expressões para aproximar ordens superiores. No FPM, exceto para os valores da função, derivadas de ordem não inferiores são inerentes em aproximar as derivadas de ordem superior. Por conseguinte, os possíveis erros numéricos existentes nas derivadas de ordem inferior não serão acumulados nas derivadas de ordem superior.

O CSPM tem consistência C^1 para o núcleo nas regiões internas e consistência C^0 nas as regiões de fronteira. O FPM tem consistência C^1 para o núcleo em ambas as regiões se apenas as derivadas de primeira ordem forem negligenciadas na expansão em série de Taylor. Exceto para partículas uniformemente distribuídas e internas, CSPM tem consistência C^0 . O FPM tem consistência C^1 sempre, desde que apenas as derivadas de primeira ordem sejam negligenciadas na expansão em série de Taylor.

Os resultados dos testes numéricos comprovaram a eficiência da função núcleo *Dome-shaped* modificada para a restaurar a consistência. Vale ressaltar que nenhum tipo de tratamento de fronteira (cf. [4]) foi aplicado, caso contrário, os resultados seriam ainda mais eficazes.

O método adaptado é capaz de recuperar um polinômio com C^2 ordem de consistência com melhores resultados mesmo que para distribuições envolvendo desordem canônica das partículas. A recuperação das derivadas não foram consideradas, portanto, necessita-se da construção de um polinômio restaurador para elas.

REFERÊNCIAS

- [1] M. Antuono; B. Bouscasse; A. Colagrossi; S. Marrone. A measure of spatial disorder in particle methods. *Computer Physics Communications*, 18(10):2609–2621, 2014.
- [2] G. Chaussonnet; B. Samuel; W. Lars; K. Rainer; B. Hans-Jorg. Influence of particle disorder and smoothing length on SPH operator accuracy. *Conference Paper - 10th international SPHERIC workshop*, June 2015.
- [3] J. K. Chen; J. E. Beraun; T. C. Carney. A corrective smoothed particle method for boundary value problems in heat conduction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:231–252, 1999.
- [4] L. P. da Silva. Análise de aspectos fundamentais de métodos de partículas. Master's thesis, FCT/UNESP-PP, Presidente Prudente, 2017.
- [5] F. Le; M. J. Christophe; L. Julien; A. Andrea; C. Joelle. A high-order SPH method by introducing inverse kernels. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2017.
- [6] M. B. Liu; G. Liu; K. Lam. Construing smoothed functions in smoothed particle hydrodynamics with applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 155:263–284, 2003.
- [7] M. B. Liu; G.R. Liu. Restoring particle consistency in smoothed particle hydrodynamics. *Applied Numerical Mathematics*, 56:19–36, 2006.
- [8] G. R. Liu; M. B. Liu. *Smoothed Particle Hydrodynamics: a meshfree particle method*. World Scientific Publishing, 1 edition, 2003.
- [9] J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomical and Astrophysics.*, 30:543–574, 1992.
- [10] D. Violeau. *Fluid Mechanics and the SPH Method: Theory and Applications*. Oxford University Press, 2012.
- [11] X. F. Yang; S. L. Peng; M. B. Liu. A new kernel function for SPH with applications to free surface flows. *Journal of Applied Mathematical Modelling*, 38:3822–3833, 2014.