

Estudo de métodos numéricos para a solução de pórticos planos com não linearidade geométrica

Luiz Antonio Farani de Souza

Curso de Engenharia Civil

UTFPR

lasouza@utfpr.edu.br

Emerson Vitor Castelani

Wesley Vagner Inês Shirabayashi

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Universidade Estadual de Maringá - UEM

Resumo — Este artigo tem por objetivo comparar pré-condicionadores para a solução do sistema de equações lineares gerado da formulação do Método dos Elementos Finitos, a cada iteração no processo incremental, em problemas de pórticos planos com não linearidade geométrica. As trajetórias de equilíbrio são obtidas por meio do método de Newton - Raphson associado às técnicas de continuação Controle de Deslocamento Generalizado e Controle de Comprimento de Arco com Iteração Ortogonal à Tangente da Iteração Anterior.

Palavras-chave — pórtico; pré-condicionador; gradientes conjugados; técnicas de continuação

I. INTRODUÇÃO

No campo da Engenharia de Estruturas, mais especificamente na área da aplicação numérica, a crescente simulação de modelos estruturais complexos - por meio do Método dos Elementos Finitos - tem exigido a manipulação de grande quantidade de dados, que é intrínseco ao método, bem como a procura da diminuição do tempo de resposta para a resolução do sistema de equações lineares gerado a cada iteração.

Uma forma comum de representação gráfica da resposta estática não linear de uma estrutura consiste no traçado da curva deslocamento *versus* força (trajetória de equilíbrio), em que a abscissa corresponde a uma componente de deslocamento de um nó selecionado, e a ordenada representa o parâmetro de força. Uma metodologia eficiente de solução para um problema de estruturas com comportamento não linear deve ser capaz de traçar toda a trajetória de equilíbrio (caminhos primários e secundários) do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares ou críticos que possam existir [1].

Para efeito de projeto estrutural, deseja-se conhecer o carregamento último de colapso e sua resposta deslocamento em relação à força aplicada. Dependendo das características da estrutura, essa resposta pode ser linear ou não linear. No comportamento não linear não há proporcionalidade entre o carregamento aplicado e as deformações e/ou deslocamentos [2]. Há dois tipos básicos de não linearidade que ocorrem na análise estrutural: o primeiro tipo é conhecido por não linearidade física e é causada por um comportamento elástico não linear, plástico ou viscoso do material que constitui a estrutura; e o segundo é a não linearidade geométrica e ocorre quando as deformações são suficientemente grandes para causar mudanças significativas na estrutura, fazendo com que

as equações de equilíbrio sejam formuladas na configuração deformada da mesma [3].

Para a solução de um problema estrutural não linear num procedimento incremental e iterativo, o sistema de equações lineares decorrente da formulação do Método dos Elementos Finitos é resolvido a cada iteração no passo de força corrente até que se atinja a convergência, sendo, em geral, o processo que demanda maior esforço computacional (tempo de processamento) durante a simulação. Como tal sistema pode ser mal - condicionado próximo de pontos críticos da trajetória de equilíbrio, a utilização de pré-condicionadores é muito importante [4].

Este artigo tem por objetivo comparar pré-condicionadores para a solução do sistema de equações lineares gerado da formulação do Método dos Elementos Finitos, a cada iteração no processo incremental, em problemas de pórticos planos com não linearidade geométrica. As análises estáticas não lineares com o *software* Matlab são efetuadas com o método de Newton - Raphson associado às técnicas de continuação Controle de Deslocamento Generalizado (GDCM), e Controle de Comprimento de Arco com Iteração Ortogonal à Tangente da Iteração Anterior (CTIA). O método iterativo Gradientes Conjugados (GC) e sua versão pré-condicionada (GCP) são implementados computacionalmente, sendo comparados com métodos diretos clássicos da literatura - Fatoração LU, Fatoração de Cholesky e Eliminação de Gauss. O desempenho desses métodos é avaliado com base nos parâmetros: número total de incrementos de força (NP), número total de iterações (I_t), e tempo de processamento.

Quando o número de condicionamento da matriz é grande, o que ocorre com frequência em sistemas que surgem da discretização de problemas não lineares por Elementos Finitos, o método GC converge mais lentamente, podendo, até mesmo, não convergir. Em vista disso o emprego de um bom pré-condicionador tem um forte efeito sobre a convergência do método [5]. Testes foram efetuados com o método GCP associado às seguintes matrizes pré-condicionadoras: Diagonal (\mathbf{M}_D), Fatoração Incompleta LU (\mathbf{M}_{LDL}), Fatoração Incompleta de Cholesky ($\mathbf{M}_{\tilde{G}\tilde{C}}$), Polinomial (\mathbf{M}_P) e Sobre - Relaxação Simétrica Incompleta (\mathbf{M}_{SSOR}).

II. PROBLEMA ESTRUTURAL

A equação que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural pode ser descrita pela equação [6]:

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{u}), \quad (1)$$

sendo \mathbf{g} o vetor de forças desequilibradoras, \mathbf{F}_i o vetor de forças internas (avaliado em função do vetor de deslocamentos totais nos pontos nodais da estrutura \mathbf{u}), e λ o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor \mathbf{F}_r , sendo este um vetor de referência e de magnitude arbitrária. A estimativa para o deslocamento residual $\delta \mathbf{u}$ é determinada pelo seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad (2)$$

sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural. Segundo [7], os deslocamentos residuais são definidos como a soma de duas parcelas:

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_g + \delta \lambda \delta \mathbf{u}_r, \quad (3)$$

onde $\delta \lambda$ é o parâmetro de força que deve ser avaliado ao longo do ciclo iterativo, e $\delta \mathbf{u}_g$ e $\delta \mathbf{u}_r$ são obtidos, respectivamente, por:

$$\delta \mathbf{u}_g = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}, \quad (4)$$

$$\delta \mathbf{u}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r. \quad (5)$$

Os parâmetros incrementais de força ($\Delta \lambda$) e deslocamento ($\Delta \mathbf{u}$) no passo de força $t+\Delta t$ e iteração k são avaliados, respectivamente, por:

$$\Delta \lambda^{(k)} = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)}, \quad (6)$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(k)} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (7)$$

Os parâmetros totais de força (λ) e deslocamento (\mathbf{u}) são atualizados por, respectivamente:

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \Delta \lambda^{(k)}, \quad (8)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (9)$$

A determinação do parâmetro de força iterativo ($\delta \lambda$) é função da estratégia de iteração ou da equação de restrição imposta adicionalmente ao problema não linear. O problema estrutural dado em (11) é avaliado de forma incremental e iterativo, ou seja, para uma sequência de incrementos do parâmetro de força é determinada uma sequência de incrementos de deslocamentos nodais.

O vetor de deslocamento \mathbf{u} no passo de força $t+\Delta t$ e iteração k é obtido pelo esquema iterativo de Newton - Raphson por meio das seguintes equações:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k-1)}, \quad (10)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (11)$$

O algoritmo para o método de Newton - Raphson está descrito na Fig. 1.

```

1) Para a primeira iteração (k = 1):
   Calcular a matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(0)}$ 
   Calcular  $\delta \mathbf{u}_r^{(1)} = (\mathbf{K}^{(0)})^{-1} \mathbf{F}_r$ 
   Calcular o parâmetro de força incremental inicial  $\delta \lambda^{(1)}$ 
   Calcular  $\delta \mathbf{u}^{(1)} = \delta \lambda^{(1)} \delta \mathbf{u}_r^{(1)}$ 
2) Para as próximas iterações (k = 2, 3, ...):
   Atualizar a matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(k-1)}$ 
   Calcular o vetor de força interna  $\mathbf{F}_i(\mathbf{u}^{(k-1)})$ 
   Calcular o vetor  $\mathbf{g}^{(k)} = \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{u}^{(k-1)})$ 
   Calcular  $\delta \mathbf{u}_g^{(k)} = (\mathbf{K}^{(k-1)})^{-1} \mathbf{g}^{(k)}$ 
   Calcular  $\delta \mathbf{u}_r^{(k)} = (\mathbf{K}^{(k-1)})^{-1} \mathbf{F}_r$ 
   Calcular o parâmetro de força incremental  $\delta \lambda^{(k)}$ 
   Calcular  $\delta \mathbf{u}^{(k)} = \delta \mathbf{u}_g^{(k)} + \delta \lambda^{(k)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)}$ 
3) Atualizar  $\Delta \mathbf{u}^{(k)} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}$ 
4) Atualizar  $\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{u}^{(k)}$ 
5) Atualizar  $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)}$ 
6) Se  $\|\mathbf{g}^{(k)}\| > \zeta$  ou  $\frac{\|\Delta \mathbf{u}^{(k)}\|}{\|\delta \mathbf{u}^{(k)}\|} > \zeta$ 
   Retornar ao passo 2)
   Senão
   Retornar ao passo 1) ou parar o processo
   incremental.
Fim

```

Fig. 1. Algoritmo para o procedimento de Newton - Raphson.

III. TÉCNICAS DE CONTINUAÇÃO

A metodologia para a solução de problemas estruturais não lineares deve ser capaz de traçar a trajetória de equilíbrio completa (identificando e passando por todos os pontos críticos). Para esse fim, utiliza-se um processo incremental-iterativo que consiste de duas etapas [8]:

1. A partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, seleciona-se um incremento de força (definido como parâmetro de força inicial - $\delta \lambda^{(1)}$), procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Após a seleção desse parâmetro, determina-se o incremento inicial de deslocamentos nodais $\delta \mathbf{u}^{(1)}$; e

2. Na segunda etapa de solução, procura-se por meio de uma estratégia de continuação corrigir a solução incremental inicialmente proposta, com o objetivo de restaurar o equilíbrio da estrutura. Se as iterações envolverem deslocamentos nodais (\mathbf{u}) e o parâmetro de força (λ), então uma equação adicional de restrição é requerida. O formato dessa equação é o que distingue as várias estratégias de iteração.

As análises não lineares são efetuadas com as seguintes estratégias de controle de iteração e incremento de força (métodos de continuação):

- Controle de Comprimento de Arco com Iteração Ortogonal à Tangente da Iteração Anterior (CTIA); e
- Controle de Deslocamento Generalizado (GDCM).

Na Tabela I são apresentadas as equações para a avaliação do parâmetro de força inicial ($\delta \lambda^{(1)}$), e para o cálculo do parâmetro de força para a correção da solução incremental inicial ($\delta \lambda^{(k)}$), para cada um dos métodos de continuação.

TABELA I. PARÂMETROS DE FORÇA $\delta\lambda^{(1)}$ E $\delta\lambda^{(k)}$.

Método	k = 1	k = 2, 3, ..., N
CTIA	$\delta\lambda^{(1)} = \pm \frac{\Delta S}{\sqrt{\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} \delta\mathbf{u}_r^{(1)}}}$	$\delta\lambda^{(k)} = -\frac{\Delta\mathbf{u}^{(k-1)T} \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{\Delta\mathbf{u}^{(k-1)T} \delta\mathbf{u}_r^{(k)}}$
GDCM	$\delta\lambda^{(1)} = \pm \frac{{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} \delta\mathbf{u}_r^{(k)}}$	$\delta\lambda^{(k)} = -\frac{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(k)T} \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(k)T} \delta\mathbf{u}_r^{(k)}}$

Há possibilidade de que o incremento de deslocamento tenda ao infinito em pontos próximos a um ponto limite da trajetória de equilíbrio. Para evitar que isso ocorra, limitou-se este deslocamento a um valor máximo. Para todos os métodos foi considerada a seguinte condição quanto ao incremento de deslocamento: se $\|\delta\mathbf{u}^{(k)}\| > u_{\text{máx}}$, então:

$$\delta\mathbf{u}^{(k)} = \frac{u_{\text{máx}}}{\|\delta\mathbf{u}^{(k)}\|} \delta\mathbf{u}^{(k)}. \quad (12)$$

Para o método CTIA, o sinal de $\delta\lambda^{(1)}$ é avaliado da seguinte forma: se ${}^t\Delta\mathbf{u}^T \Delta\mathbf{u}^{(1)} < 0$, então:

$$\Delta\mathbf{u}^{(1)} = -\Delta\mathbf{u}^{(1)}, \quad (13)$$

$$\Delta\lambda^{(1)} = -\Delta\lambda^{(1)}. \quad (14)$$

Assim, assegura-se que a trajetória de equilíbrio será percorrida corretamente mesmo se houver uma reversão do deslocamento.

Para o método GDCM, o sinal de $\delta\lambda^{(1)}$ é determinado em função do parâmetro de rigidez GSP, dado por:

$$\text{GSP} = \frac{{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} \delta\mathbf{u}_r^{(1)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} \delta\mathbf{u}_r^{(1)}}. \quad (15)$$

Esse parâmetro torna-se negativo próximo a pontos limites. Dessa maneira, se $\text{GSP} < 0$, então $\delta\lambda^{(1)} = -\delta\lambda^{(1)}$. Uma estratégia adaptativa é a determinação automática da variação do parâmetro de força inicial ($\delta\lambda^{(1)}$), que consiste em, ao final de cada passo da análise, monitorar o número de iterações requeridas para a convergência (N_{it}) da técnica iterativa e comparar esse número com um valor ótimo (N_{ot}). Por meio dessa monitoração, o parâmetro de força inicial é determinado pela equação obtida de [8]-[9]:

$$\delta\lambda^{(1)} = \sqrt{\frac{N_{ot}}{N_{it}}} \delta\lambda^{(1)} \sqrt{|\text{GSP}|}. \quad (16)$$

IV. MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS

O método iterativo Gradientes Conjugados (GC) é utilizado na resolução de sistemas lineares, em que a matriz dos coeficientes (matriz de rigidez \mathbf{K}) é simétrica positiva definida [10]. A estratégia desse método consiste em sempre ir buscando direções ortogonais $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{i-1}$ às direções já calculadas anteriormente. Para cada uma dessas direções se encontrará uma das coordenadas de \mathbf{u} . Com isso, após n passos, o processo terminará e a solução procurada é encontrada [11]. O algoritmo do Método dos Gradientes Conjugados é apresentado na Fig. 2.

1. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{g} - \mathbf{K} \mathbf{u}_0$
2. $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0$
3. Enquanto ($\ \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i\ /\ \mathbf{u}_{i+1}\ > \text{Tol}$ Ou $\ \mathbf{r}_{i+1}\ > \text{Tol}$)
4. $\alpha_i = \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i}{\mathbf{p}_i^T \mathbf{K} \mathbf{p}_i}$
5. $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \alpha_i \mathbf{p}_i$
6. $\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \alpha_i \mathbf{K} \mathbf{p}_i$
7. $\beta_i = \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T \mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i}$
8. $\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{r}_{i+1} + \beta_i \mathbf{p}_i$
9. Fim

Fig. 2. Algoritmo do método GC.

O número de condicionamento da matriz pode ser interpretado em termos do raio espectral, ou seja, pode-se interpretar o número de condicionamento como o quociente entre o maior e o menor autovalor em módulo da matriz. Quando esse número é grande, o que ocorre com frequência em sistemas que surgem da discretização de problemas não lineares por Elementos Finitos, o método GC converge mais lentamente, podendo até mesmo não convergir. Por isso, frequentemente, utiliza-se o Método dos Gradientes Conjugados Pré-condicionado (GCP) ao invés dos Gradientes Conjugados [5].

A técnica de pré-condicionamento é utilizada para melhorar as propriedades da matriz de coeficientes (\mathbf{K}) do sistema e acelerar a convergência do método. Na Fig. 3 é apresentado o algoritmo do método GCP. Salienta-se que, além da construção da matriz pré-condicionadora (\mathbf{M}), o método realiza duas soluções internas de sistema ($\mathbf{z}_0 = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_0$ e $\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_{i+1}$) a cada iteração. Embora a notação de matriz inversa seja conveniente, seu cálculo não é necessário.

1. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{g} - \mathbf{K} \mathbf{u}_0$
2. $\mathbf{z}_0 = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_0$
3. $\mathbf{p}_0 = \mathbf{z}_0$
4. Enquanto ($\ \mathbf{r}_{i+1}\ > \text{Tol}$ Ou $\ \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i\ /\ \mathbf{u}_{i+1}\ > \text{Tol}$)
5. $\alpha_i = \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{z}_i}{\mathbf{p}_i^T \mathbf{K} \mathbf{p}_i}$
6. $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \alpha_i \mathbf{p}_i$
7. $\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \alpha_i \mathbf{K} \mathbf{p}_i$
8. $\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_{i+1}$
9. $\beta_i = \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T \mathbf{z}_{i+1}}{\mathbf{r}_i^T \mathbf{z}_i}$
10. $\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{z}_{i+1} + \beta_i \mathbf{p}_i$
11. Fim

Fig. 3. Algoritmo do método GCP.

V. PRÉ-CONDICIONADORES

Um pré-condicionador é uma matriz que transforma um sistema em outro com propriedades mais favoráveis para a solução iterativa. Essa técnica consiste em transformar o sistema dado em (2) num sistema equivalente escrito da seguinte forma [12]-[13]:

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \delta\mathbf{u} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g}, \quad (17)$$

onde \mathbf{M} é o pré-condicionador.

A. Pré - condicionador de Jacobi (M_D)

Também chamado de Pré-condicionador Diagonal, é o pré-condicionador mais simples e é constituído pelos elementos da diagonal principal da matriz \mathbf{K} . Os elementos da diagonal principal (d_{ii}) do mesmo podem ser obtidos por:

$$d_{ii} = K_{ii}, \quad (18)$$

$$d_{ii} = \sqrt{|K_{ii}|}, \quad (19)$$

$$d_{ii} = \sqrt{\max|K_{.i}|}, \quad (20)$$

sendo o subíndice $i = 1, \dots, n$ e n o número de equações do sistema. Essa matriz pode ser utilizada se houver uma variação nos valores dos coeficientes da diagonal principal [14], pois o pré-condicionador não terá efeito sobre a convergência se esses valores forem iguais. Por outro lado, apresenta resultados significativos quando as magnitudes das entradas da diagonal variam consideravelmente [15].

B. Fatoração incompleta de Cholesky ($M_{\tilde{G}\tilde{G}}$)

Esse método se baseia em fazer uma fatoração de \mathbf{G} , de maneira que alguns elementos são negligenciados em posições apropriadas. Essas posições são escolhidas de modo que se possa manter a esparsidade de \mathbf{K} sobre a matriz triangular e, por isso, o método é denominado de Decomposição Incompleta de Cholesky. Pode-se escolher um campo de preenchimento da matriz \mathbf{G} , onde o par (i,j) indicará as posições de todos os valores diferentes de zero. Por exemplo, seja o campo dado pelo conjunto [11]:

$$P = \{(i,j) | |i-j| = 0, 1, \dots, m\} \text{ ou} \quad (21)$$

$$P = \{(i,j) | |i-j| \leq m\}.$$

Supondo $m = 2$, a matriz $\tilde{\mathbf{G}}$ é determinada utilizando os elementos das diagonais "a", "b", "c", "d" e "e" da matriz \mathbf{K} , conforme o esquema mostrado na Fig. 4.

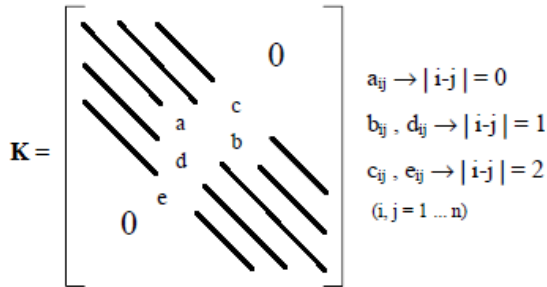


Fig. 4. Campo considerado de \mathbf{K} para montar \mathbf{G} . Fonte: adaptada de [11].

Ao construir uma fatoração de Cholesky incompleta, está-se construindo o fator $\tilde{\mathbf{G}}$ que aproxima o fator \mathbf{G} , isto é, $\tilde{\mathbf{G}} \approx \mathbf{G}$. Esta fatoração incompleta de \mathbf{K} representa uma fatoração completa de $\tilde{\mathbf{K}}$, quer dizer, $\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^T$, onde o pré-condicionador \mathbf{M} é dado por:

$$\mathbf{M}_{\tilde{G}\tilde{G}} = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^T. \quad (22)$$

C. Fatoração incompleta LU ($M_{\tilde{L}\tilde{U}}$)

Ao construir uma fatoração LU incompleta, constroem-se os fatores $\tilde{\mathbf{L}}$ e $\tilde{\mathbf{U}}$ que aproximam os fatores \mathbf{L} e \mathbf{U} , respectivamente, ou seja, $\tilde{\mathbf{L}} \approx \mathbf{L}$ e $\tilde{\mathbf{U}} \approx \mathbf{U}$, ou $\mathbf{K} = \mathbf{LU} - \mathbf{R}$, onde \mathbf{R} é o resíduo ou erro da fatoração. Aqui o pré-condicionador \mathbf{M} será determinado utilizando um bloco de

diagonais ($|i-j| \leq m$), da mesma forma que na fatoração incompleta de Cholesky. O pré-condicionador $\mathbf{M}_{\tilde{L}\tilde{U}}$ utilizando a fatoração LU incompleta é calculado por:

$$\mathbf{M}_{\tilde{L}\tilde{U}} = \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{L}}^T \quad (23)$$

onde $\tilde{\mathbf{D}}$ é uma matriz diagonal cujos elementos não nulos são os elementos da diagonal principal de $\tilde{\mathbf{U}}$.

D. Pré - condicionador polinomial (M_p)

O pré-condicionador polinomial é uma das técnicas clássicas para se obter a aproximação da inversa da matriz \mathbf{K} , mediante uma aproximação com o uso de uma expansão polinomial em potências de \mathbf{K} . Parte-se, inicialmente, da hipótese de que a matriz \mathbf{K} é simétrica e definida positiva e, então, pode-se reescrevê-la da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}_s + \bar{\mathbf{K}}, \quad (24)$$

tal que \mathbf{D}_s é a matriz formada apenas pelos elementos da diagonal principal de \mathbf{K} e $\bar{\mathbf{K}}$ é a matriz dos elementos de \mathbf{K} com valores nulos em toda a diagonal principal. Se a matriz \mathbf{K} for estritamente diagonal dominante, pode-se escrever a aproximação da inversa de \mathbf{K} como uma série polinomial da seguinte maneira [16]-[17]:

$$\mathbf{K}^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\mathbf{D}_s^{-1}\bar{\mathbf{K}})^j \mathbf{D}_s^{-1} \quad (25)$$

Para a aplicação da série é comum truncar o polinômio em, no máximo, potências de cinco. Para valores acima desse é comum começar a ocorrer instabilidade no sistema tratado, conforme o aumento na ordem da potência. Em [18], faz-se aplicações com expansões de potências de ordem um e dois e, em geral, esta técnica de pré-condicionamento é denominada de POLY (n_T), tal que n_T é o número de potências retidas no truncamento da série. Um pré-condicionador que é fácil de ser implementado, tanto em ambiente em série como em paralelo, é o POLY(0), que também é denominado de pré-condicionador de Jacobi. Utilizou-se, neste trabalho, a inversa do pré-condicionador como uma série polinomial de ordem dois:

$$\mathbf{M}_p^{-1} = \sum_{j=0}^2 (-1)^j (\mathbf{D}_s^{-1}\bar{\mathbf{K}})^j \mathbf{D}_s^{-1} \quad (26)$$

E. Pré - condicionador Sobre - Relaxação Simétrica (M_{SSOR})

Dada a fatoração da matriz $\mathbf{K} = \mathbf{D} + \mathbf{N} + \mathbf{U}$, sendo \mathbf{D} correspondente aos elementos da diagonal de \mathbf{K} , e \mathbf{N} e \mathbf{U} correspondentes, respectivamente, às partes triangulares estritamente inferior e superior de \mathbf{K} . O pré-condicionador Sobre - Relaxação Simétrica é dado por:

$$\mathbf{M}_{SSOR} = \frac{1}{\omega(2-\omega)} (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} + \omega\mathbf{U}) \quad (27)$$

sendo $0 < \omega < 2$, caso contrário a matriz \mathbf{M}_{SSOR} não será definida positiva. Segundo [19], recomenda-se que o valor de ω esteja compreendido no intervalo $1,2 \leq \omega \leq 1,6$.

Pode-se construir, também, uma fatoração incompleta da matriz \mathbf{K} fazendo $\mathbf{K} \approx \mathbf{D} + \tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{U}}$ utilizando um bloco de diagonais ($|i-j| \leq m$). O pré-condicionador Sobre - Relaxação Simétrica incompleto é dado por:

$$\mathbf{M}_{\text{SSOR}} = \frac{1}{\omega(2 - \omega)} (\mathbf{D} + \omega \tilde{\mathbf{L}}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} + \omega \tilde{\mathbf{U}}) \quad (28)$$

VI. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos de problemas de pórticos planos com não linearidade geométrica encontrados na literatura, com o intuito de aplicar e comparar os métodos de solução. Em todas as análises estruturais, considerou-se para a verificação da convergência a cada iteração k a tolerância ζ igual a 10^{-5} . O peso próprio das estruturas é desprezado nas análises. No tempo de processamento não estão contabilizadas a geração da malha de Elementos Finitos e a visualização dos resultados.

A. Pórtico de dois andares

A estrutura que está esboçada na Fig. 5 refere-se a um pórtico de dois pavimentos com ligações viga-coluna rígidas. Para as vigas é adotado o perfil W360x72 ($A = 9100 \text{ mm}^2$ e $I = 201 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$), e para as colunas o perfil W310x143 ($A = 18200 \text{ mm}^2$ e $I = 348 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$). Na referência [20], os autores fizeram um estudo comparativo desse pórtico para analisar os efeitos de vários tipos de conexões e a influência do contraventamento na resposta do sistema. Neste exemplo utilizou-se para comparação apenas os resultados obtidos por esses autores para estruturas com conexões rígidas e sem contraventamento.

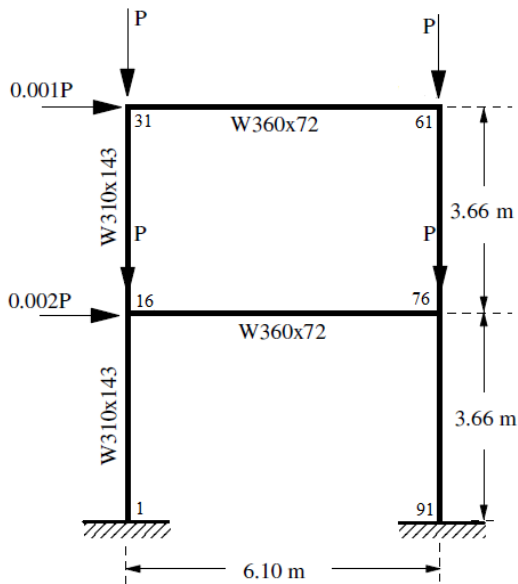


Fig. 5. Modelo estrutural do pórtico de dois andares. Fonte: adaptada de [21].

Na discretização das vigas e colunas foram usados elementos finitos de pórtico com dois nós, totalizando 120 elementos e 120 nós (número total de graus de liberdade igual a 360). Considerou-se que o material que constitui os elementos estruturais tenha comportamento elástico linear, cujo módulo de elasticidade longitudinal (E) é igual a 205,0 GPa. Para as simulações, adota-se o incremento de força ΔP igual a 200,0 kN. Na Tabela II são apresentados os parâmetros utilizados nos métodos de continuação.

TABELA II. PARÂMETROS DOS MÉTODOS DE CONTINUAÇÃO.

CTIA	GDCM
$\Delta s = 0,025$	$\delta \lambda^{(1)} = 5,1$
$u_{\text{máx}} = 15,0$	$u_{\text{máx}} = 15,0$
	$N_{\text{et}} = 5$

A Fig. 6 exibe as trajetórias de equilíbrio (deslocamento horizontal no nó 61 *versus* força P) obtidas com as análises realizadas com as técnicas de continuação GDCM e CTIA e o método GCP com $\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}}$, verificando-se a boa concordância com os resultados de [21].

Na Tabela III são apresentados os tempos de processamento (em segundos) e os números totais de passos de força (NP) e iterações (I) obtidos nas simulações. A partir dos resultados dessa tabela, vê-se que as análises com o método direto Fatoração LU apresentaram o menor tempo de processamento (tempo de CPU), em comparação com os demais métodos, independentemente da técnica de continuação adotada.

Um problema característico do método dos Gradientes Conjugados (GC) é a sua instabilidade numérica perante as diferentes propriedades do sistema linear, mais especificamente do condicionamento da matriz. Se o sistema for bem condicionado, então o método converge rapidamente, caso contrário, a convergência é sofrível tornando o método inadequado para a resolução do sistema. Para solucionar essa questão, tem-se utilizado técnicas de pré-condicionadores que visam melhorar o condicionamento do problema [11].

Com os resultados da Tabela III, fica evidente a melhora do tempo de processamento com o método GCP associado ao pré-condicionador $\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}}$. Apesar dos pré-condicionadores diagonais exigirem muito pouco armazenamento e o cálculo da sua inversa ser bastante simples, não houve ganho substancial na velocidade de convergência da solução dos sistemas em comparação com as respostas obtidas com o método GC. As análises realizadas com o método Fatoração de Cholesky foram as que apresentaram o menor valor para o número total de iterações, conforme apresentado na Tabela III.

TABELA III. RESULTADOS NUMÉRICOS.

Métodos	GDCM		CTIA	
	Tempo (s)	NP(It)	Tempo (s)	NP(It)
GC	78,338670	39(855)	30,457713	26(333)
Fatoração LU	59,844555	39(855)	23,436824	26(331)
Fatoração de Cholesky	65,055007	39(828)	24,995036	26(326)
Eliminação de Gauss	65,501978	39(855)	25,850224	26(331)
GCP com M_{LDL}	78,835379	39(855)	29,877746	26(331)
GCP com M_{GG}	66,809307	39(855)	25,649619	26(331)
GCP com M_p	105,545023	39(855)	39,826620	26(331)
GCP com M_{SSOR}	204,738895	39(855)	83,241282	26(331)
GCP com $M_D = K_{ii}$	78,060673	39(855)	30,036267	26(331)
GCP com $M_D = \sqrt{ K_{ii} }$	77,612583	39(855)	30,325466	26(332)
GCP com $M_D = \sqrt{\max K_{ij} }$	79,861892	39(855)	31,337281	26(332)

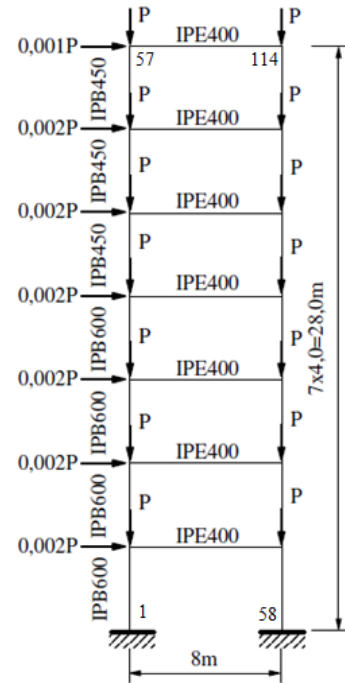


Fig. 7. Esquema estrutural do pórtico de sete andares.

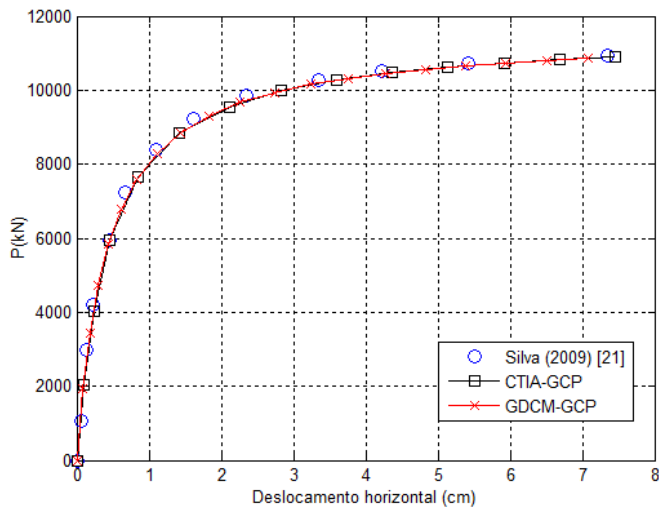


Fig. 6. Trajetórias de equilíbrio.

B. Pórtico de sete andares

Considere o desenho esquemático da estrutura na Fig. 7, que consiste de um pórtico de sete pavimentos com ligações viga-coluna rígidas. Para as vigas é adotado o perfil IPE400 ($A = 8446,0 \text{ mm}^2$ e $I = 231,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$), e para as colunas os perfis IPB450 ($A = 21800,0 \text{ mm}^2$ e $I = 798,9 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$) e IPB600 ($A = 27000,0 \text{ mm}^2$ e $I = 171,0 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$). Essa estrutura foi utilizada por [22] para análise de flambagem do pórtico e, também, foi estudada por [23].

Na discretização das colunas e vigas foram usados, respectivamente, 112 e 56 elementos finitos de pórtico, totalizando 168 elementos e 163 nós (número total de graus de liberdade igual a 489). A relação constitutiva do material é descrita por um modelo elástico linear cujo módulo de elasticidade longitudinal (E) é igual a 205,0 GPa. Para as simulações, considera-se um incremento de força ΔP igual a 500,0 kN. Os parâmetros para os métodos de continuação adotados são: ${}^1\delta\lambda^{(1)} = 3,2$, $N_{ot} = 5$, $\Delta s = 0,25$ e $u_{\max} = 30,0$.

Na Tabela IV são apresentados os tempos de processamento (em segundos) e os parâmetros NP (número total de passos de força) e I_t (número total de iterações), para as análises efetuadas com as estratégias de continuação GDCM e CTIA e os métodos para a solução dos sistemas de equações lineares. Vê-se, nessa tabela, que as análises com o método iterativo GCP associado a $M_D = K_{ii}$ mostraram melhor desempenho computacional em relação às demais, ficando o tempo muito próximo das simulações com o método direto Fatoração LU.

A utilização de um pré-condicionador em um método iterativo incorre em algum custo computacional extra. Há relação entre o custo de construir e aplicá-lo e o ganho de velocidade de convergência. Portanto, uma implementação cuidadosa deve ser feita a fim de se obter resultados numéricos competitivos, tanto em relação à velocidade quanto à robustez. Observa-se que, com o aumento do número de equações do sistema, os pré-condicionadores M_{LDL} , M_{GG} e M_p não conseguiram superar o desempenho obtido nas simulações com as matrizes diagonais.

Na Fig. 8 aparecem as trajetórias de equilíbrio (deslocamento horizontal no nó 114 versus força P) obtidas com o método iterativo GCP associado a $M_D = K_{ii}$. Observa-se a boa concordância dos resultados entre os métodos de

continuação implementados em contraste com os obtidos por [23].

TABELA IV. RESULTADOS NUMÉRICOS.

Métodos	GDCM		CTIA	
	Tempo (s)	NP(It)	Tempo (s)	NP(It)
GC	42,744133	23(217)	38,136095	25(185)
Fatoração LU	42,017468	24(229)	36,457643	25(193)
Fatoração de Cholesky	46,067342	24(232)	48,695759	25(197)
Eliminação de Gauss	48,581482	24(229)	50,607240	25(193)
GCP com $M_{L\bar{D}L}$	58,713842	24(231)	56,995527	25(193)
GCP com $M_{\bar{G}\bar{G}}$	53,853966	24(229)	50,603014	25(193)
GCP com M_p	56,062009	24(229)	47,868694	25(193)
GCP com M_{SSOR}	85,212706	24(229)	71,597439	25(193)
GCP com $M_D = K_{ii}$	40,780498	24(229)	35,565044	25(193)
GCP com $M_D = \sqrt{ K_{ii} }$	43,948946	24(231)	37,919450	25(194)
GCP com $M_D = \sqrt{\max K_{ij} }$	46,828844	24(229)	37,928448	25(193)

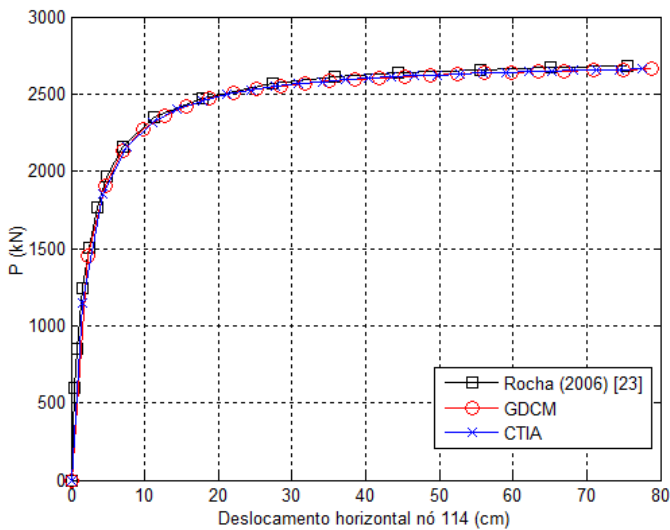


Fig. 8. Trajetórias de equilíbrio.

VII. CONCLUSÃO

A partir dos exemplos numéricos estudados, destaca-se a boa concordância entre os resultados aqui obtidos e os da literatura no que tange à obtenção das trajetórias de equilíbrio, validando o código computacional desenvolvido. A consideração dos efeitos de segunda ordem na análise pode afetar significativamente o comportamento pré-crítico e a capacidade de carga da estrutura.

Nas simulações não lineares de problemas de estruturas num processo incremental e iterativo, resolver o sistema de equações lineares gerado a cada iteração é, em geral, o passo mais caro e que demanda maior tempo e esforço computacional

durante o processamento. Mesmo com o impacto que o setor da microeletrônica tem causado no desenvolvimento de componentes computacionais, com destaque a sistemas mais compactos de memória e processadores cada vez mais rápidos, ainda assim, essas poderosas máquinas por si só nem sempre conseguem tratar adequadamente diversos modelos estruturais, quer por falta de memória, quer por excessivo tempo de resposta.

Um sistema de equações algébricas, como o dado em (2), pode ser resolvido o transformado num sistema equivalente em que a solução seja mais fácil de obter. A técnica de pré-condicionamento consiste em multiplicar matrizes apropriadas no sistema de equações a fim de aumentar a eficiência do método de solução, normalmente por melhorar o número de condição do sistema. Como o sistema costuma ser mal - condicionado na região não linear da trajetória de equilíbrio (principalmente próximo de pontos limites), os resultados desta pesquisa preliminar podem contribuir na escolha do pré-condicionador mais apropriado para a análise estrutural de pórticos com não linearidade geométrica, de maneira a diminuir o tempo de resposta na obtenção da trajetória de equilíbrio.

Uma barreira no uso corrente de modelos não lineares está relacionada aos problemas numéricos e instabilidades na convergência que podem surgir em virtude de diversos refinamentos de modelo. Isso ocorre por conta da calibração dos parâmetros necessários nesses modelos, sendo oneroso o processo, visto que diversas análises preliminares devem ser feitas antes de realizar o estudo final da estrutura. Evidencia-se a necessidade da utilização de um método incremental-iterativo para a solução adequada de problemas com não linearidade geométrica. As estratégias de continuação GDCM e CTIA mostraram-se eficientes na obtenção das trajetórias de equilíbrio para os problemas estudados.

Deve-se ressaltar que os problemas numéricos resolvidos são de pequena escala no contexto computacional atual, pois possuem menos de 500 graus de liberdade. Para sistemas dessa ordem de grandeza, métodos diretos costumam ser mais eficientes. Os métodos iterativos de solução são vantajosos quando os problemas tiverem um número maior de graus de liberdade e recursos de alocação de memória.

Como pesquisa futura, sugere-se: a resolução de problemas de estruturas com mais graus de liberdade para ilustrar o ganho de tempo; aplicar outros métodos incrementais e iterativos para a solução não linear do problema estrutural, como por exemplo, os métodos de Potra-Pták, do Ponto-Médio, de Chun e de Quase - Newton do tipo Broyden ou BFGS; implementar algoritmos que permitam efetuar ciclos de carregamento e descarregamento; considerar a flexibilidade na conexão entre os membros da estrutura (ligação semirrígida); e adequar o código implementado para estudos em análise dinâmica.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem pelo apoio da UTFPR e Programa de Pós-Graduação em Matemática da UEM.

REFERÊNCIAS

- [1] R. O. Rodrigues, "Análise dinâmica bidimensional não linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado". Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1997.
- [2] G. F. Santos, J. G. S. Silva, F. J. C. P. Soeiro e A. J. S. N. Neto, "Identificação de dano e análise de sensibilidade em treliças de aço". Congresso Argentino de Mecânica Computacional, vol. XXIX, Buenos Aires, pp. 7287-7295, 2010.
- [3] E. G. M. Lacerda, "Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional". Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.
- [4] S. Bocanegra, F. F. e Campos, A. R. L. Oliveira, "Using a hybrid preconditioner for solving large-scale linear systems arising from interior point methods". Computational Optimization and Applications, vol. 36, pp. 149 – 164, 2007.
- [5] G. H. Golub e C. F. Loan, "Matrix Computations", 3th ed. Maryland: Johns Hopkins University Press, 1996.
- [6] D. P. Maximiano, "Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas". Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.
- [7] M. A. Crisfield, "Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", vol. 1, Essentials. New York: John Wiley & Sons Ltd., 1991.
- [8] G. Rocha, "Estratégias de incremento de carga e de iteração para análise não linear de estruturas". Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto, Escola de Minas, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto, 2000.
- [9] E. Ramm, "Strategies for tracing the non-linear response near limit-points, nonlinear finite element analysis in structural mechanics", Wunderlich, W. (ed.). Berlin, Springer-Verlag, pp. 63-89, 1981.
- [10] R. L. Burden e J. D. Faires, "Análise Numérica", 8ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
- [11] V. S. Almeida e J. B. Paiva, "Aplicação do método dos gradientes conjugados com o uso de pré-condicionadores em problemas do MEF", XX Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. São Paulo: Eds. P. M. Pimenta, R. M. L. R. F. Brasil, E. S. Almeida N., 1999.
- [12] M. Benzi, "Preconditioning Techniques for Large Linear Systems: A Survey". Journal of Computational Physics, n. 182, pp. 418-477, 2002.
- [13] E. C. Nogueira, "Estudo da paralelização para solução do sistema linear do Método dos Elementos Finitos Generalizados". Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional) - Curso de Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.
- [14] J. Demmel, "Applied Numerical Linear Algebra". Massachusetts: MIT Press, 1996.
- [15] M. S. Gockenback, "Understanding and Implementing the Finite Element Method". Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- [16] P. F. Dubois, A. Greenbaum e G. H. Rodrigue, "Approximating the Inverse of a Matrix for Use in Iterative Algorithms on Vector Processors". Computing, vol. 22, pp. 257-268, 1979.
- [17] O. G. Johnson, C. A. Micchelli e G. PAUL, "Polynomial preconditioners for conjugate gradient calculations". SIAM J. Num. Anal., vol. 20, pp. 362-376, 1983.
- [18] L. A. Jr Schmt e Y. C. Lai, "Structural optimization based on preconditioned conjugate gradient analysis methods". International Journal for numerical methods in engineering, vol. 37, pp. 943-964, 1994.
- [19] P. Knabner e L. Angermann, "Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations". New York: Springer-Verlag, 2003.
- [20] S. L. Chan e P. P. T. Chui, "Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections". Oxford: Elsevier, 2000.
- [21] A. R. D. Silva, "Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas". Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2009.
- [22] M. Sekulovic e M. Nefovska-Danilovic, "Static Inelastic Analysis of Steel Frames with Flexible Connections", Theoret. Appl. Mech., vol. 31, n. 2, pp. 101-134, 2004.
- [23] P. A. S. Rocha, "Análise Inelástica de Segunda Ordem de Estruturas Metálicas com Ligações Semi-Rígidas". Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2006.