

# Uma Abordagem Preliminar para o Estudo de Sistemas Dinâmicos Não Lineares:

## Um Enfoque na Dinâmica dos Sistemas

Diego Gabriel Metz<sup>1</sup>, Roberto Dalledone Machado<sup>2</sup>, Thiago de Oliveira Abeche<sup>3</sup>, Marcos Arndt<sup>4</sup>

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE)

Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Curitiba-PR, Brasil

metz@ufpr.br<sup>1</sup>, rdm@ufpr.br<sup>2</sup>, abeche@ufpr.br<sup>3</sup>, arndt.marcos@gmail.com<sup>4</sup>

**Resumo**—Este trabalho tratará do estudo de sistemas dinâmicos em que será exposto o método dos elementos finitos (MEF) de modo a entender os elementos de viga Euler – Bernoulli, conceitos da teoria do dano contínuo e o método de Newmark.

**Palavras-chave**—Mecânica do Dano, Método dos Elementos Finitos, Modelagem Computacional, Sistemas Dinâmicos.

### I. INTRODUÇÃO

Na engenharia civil, o dimensionamento de pontes, por norma, permite considerar os efeitos dinâmicos das cargas móveis de maneira simplificada, assimilando-se as cargas móveis a cargas estáticas, através de sua multiplicação por um coeficiente de impacto para majoração das cargas, ocasionando, normalmente, um superdimensionamento e não desprezando os efeitos e respostas reais da estrutura, como para o caso da ressonância [1].

Atualmente, o engenheiro estrutural se defronta com problemas complexos, cuja análise deve ser realizada no domínio da dinâmica não linear. A solução desses problemas era, entretanto, extremamente difícil, se não mesmo impossível, há pouco tempo atrás. Alguns fatores motivaram o tratamento desses modelos cada vez mais complexos [2].

Segundo Ebecken [3], a análise não linear de estruturas complexas, por métodos numéricos orientados à computação, vem apresentando grande importância em muitas áreas da engenharia, inclusive na atualidade. Assim, faz-se necessário desenvolver modelos mais realísticos que considere efeitos de maior complexidade como o caso da não linearidade física.

### II. TÓPICOS RELATIVOS AO TRABALHO

#### A. Dinâmica Linear e Interação Dinâmica entre Veículo, Irregularidades e Ponte

Em relação à interação dinâmica, há diversas abordagens acopladas e desacopladas na literatura que promovem a interação entre a dinâmica estrutural e dinâmica veicular.

Yang, Yau e Hsu [4] consideraram os efeitos da interação dinâmica linear entre uma ponte e um veículo férreo variando-se a amplitude das irregularidades da via e a velocidade

veicular. Nesta forma de abordagem, os efeitos dinâmicos são considerados. Trata-se, portanto, de uma análise dinâmica linear.

#### B. Mecânica do Dano

Na mecânica do dano, a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um campo de defeitos continuamente distribuído, tais como microfissuras ou poros [5].

#### C. Dinâmica Não Linear

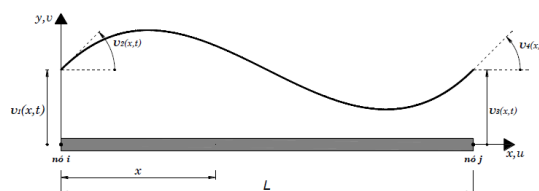
O desenvolvimento de procedimentos de análise não linear pelo método dos elementos finitos é baseado essencialmente no conhecimento de três diferentes áreas: mecânica do contínuo, procedimentos de análise numérica e implementação computacional. Dentro dos métodos numéricos, a integração numérica no espaço, a solução de sistemas de equações, o cálculo de autovalores e a integração numérica no tempo são o foco para análises não lineares [1].

### III. ELEMENTO FINITO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI

Os elementos finitos de viga são originados pela subdivisão da viga em pequenos membros os quais possuem as mesmas propriedades materiais e geométricas pertencentes à viga original [6].

O elemento finito de viga de Euler-Bernoulli é apresentado na Figura 1.

Fig. 1. Elemento finito de viga e seus graus de liberdade



Fonte: Abeche (2005)

A matriz de massa consistente  $[M_e]$  e a matriz de rigidez  $[K_e]$  do elemento finito de viga podem ser obtidas utilizando-se, respectivamente, as funções de forma polinomiais cúbicas de *Hermite* [7] da seguinte maneira:

$$[M_e] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$[K_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

O amortecimento estrutural pode ser definido pelo método de Rayleigh.

#### IV. TEORIA DO DANO CONTÍNUO

Considere-se um sólido com dano do qual é retirado um elemento de volume representativo, RVE. Seja  $S$  a área de uma das faces do RVE, definida por um plano cuja normal é o versor  $n$ , em que as microfissuras têm formas e orientações quaisquer. A área efetiva é dada pela subtração da área íntegra  $S$  pela área de defeitos  $S_D$ .

$$\tilde{S} = S - S_D = S(1 - D) \quad (3)$$

A variável de dano assume valores no intervalo de  $0 \leq D_n \leq 1$ , sendo que o valor igual à 0 representa o material íntegro e 1 indica um estado total de deterioração [5].

O estado de deformação, unidimensional ou tridimensional, de um material com dano é obtido da lei do comportamento do material íntegro onde a tensão normal é substituída pela tensão efetiva, conforme Eq. (4) [1].

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{F}{S(1-D)} = \frac{\sigma}{(1-D)} \quad (4)$$

#### V. DINÂMICA LINEAR DOS SISTEMAS

Seja a equação da dinâmica estrutural, no caso mais geral [8]:

$$[M_B] \{\ddot{u}_B\} + [C_B] \{\dot{u}_B\} + [K_B] \{u_B\} = \{F_B(t)\} \quad (5)$$

onde  $[M_B]$ ,  $[C_B]$  e  $[K_B]$  são as matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez,  $\{u_B\}$ ,  $\{\dot{u}_B\}$  e  $\{\ddot{u}_B\}$  são os vetores globais de deslocamento, velocidade e aceleração da ponte e  $\{F_B(t)\}$  é a força atuante no sistema ao longo do tempo.

Para solução da Eq. (5), utiliza-se o método de Newmark, conforme explicado no algoritmo abaixo.

##### A. Método de Newmark para Solução da Equação Dinâmica Linear

###### 1) Cálculos inerciais

- Formar as matrizes do sistema:  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$ ;
- Iniciar os vetores com as condições iniciais:  $\{u\}_{t=0}$ ,  $\{\dot{u}\}_{t=0}$  e  $\{\ddot{u}\}_{t=0}$ ;
- Selecionar o passo de tempo  $\Delta t$  e os parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$  e calcular as constantes de integração:

$$\delta \geq 0.5; \quad \alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2; \quad (6)$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1; \quad (7)$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta); \quad a_7 = \delta \Delta t$$

- Formar a matriz de rigidez efetiva  $[K_{EF}]$ :

$$[K_{EF}] = [K] + a_0[M] + a_1[C] \quad (8)$$

- Para cada passo de tempo:

- Cálculo da força efetiva no passo de tempo  $t + \Delta t$ ;

$$\{F_{EF}\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t+\Delta t} + [M](a_0\{u\}_t + a_2\{\dot{u}\}_t + a_3\{\ddot{u}\}_t) + [C](a_1\{u\}_t + a_4\{\dot{u}\}_t + a_5\{\ddot{u}\}_t) \quad (9)$$

- Resolução do sistema para os deslocamentos no tempo  $t + \Delta t$ :

$$\{F_{EF}\}_{t+\Delta t} = [K_{EF}]\{u\}_{t+\Delta t} \quad (10)$$

- Cálculo das respostas dinâmicas de aceleração e velocidade no tempo  $t + \Delta t$ :

$$\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} = a_0(\{u\}_{t+\Delta t} - \{u\}_t) - a_2\{\dot{u}\}_t - a_3\{\ddot{u}\}_t; \quad (11)$$

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + a_6\{\ddot{u}\}_t + a_7\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}$$

#### VI. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Futuramente, será estudado os efeitos dinâmicos obtidos a partir da interação dinâmica desacoplada entre o veículo e a ponte, considerando a velocidade dos veículos, as diferentes formas de as irregularidades da via e a mecânica do dano na estrutura da ponte através de uma análise dinâmica não linear.

#### AGRADECIMENTOS

O primeiro autor gostaria de agradecer aos outros autores e reconhecer o suporte financeiro providenciado pela CAPES.

#### REFERÊNCIAS

- ABECHE, T. O. Modelagem computacional da interação dinâmica desacoplada entre viga e veículo considerando as irregularidades da via e a mecânica do dano contínuo, 232f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba 2015.
- MACHADO, R. D. Análise Dinâmica Não-linear de Sistemas Rígido-Flexíveis. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1983.
- EBECKEN, N. F. F. LORANE-NL – Uma Linguagem Orientada à Análise Estrutural Não-Linear. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977.
- YANG, Y. B.; YAU, J. D.; HSU, L. C. Vibration of simple beams due to trains moving at high speeds. Engineering Structures, Great Britain, 1997. v. 19, n. 11, pp. 936–944.
- JANSON, J.; HULT, J. Fracture mechanics and damage mechanics a combined approach. Journal de Mécanique Appliquée, 1977. v. 1, n. 1, pp. 69–84.
- BEGHETTO, F. L. M. Efeitos dinâmicos em modelo de veículo e ponte ferroviária diante da variação de velocidade e irregularidades verticais da via, 105f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.
- CHOPRA, A. K. Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995.
- BATHE, K. J. Finite Element Procedures, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.