

Comparação entre abordagem numérica e analítica para o caso de uma viga engastada

Letícia B. Col Debella, Patrícia L. M. Freisleben,
Ariane H. Silva, Daniane F. Vicentini
PPGECC
Universidade Federal do Paraná
Curitiba, Brasil
daniavicentini@gmail.com

Paulo de Oliveira Weinhardt
PPGMNE
Universidade Federal do Paraná
Curitiba, Brasil
paulo.weinhardt@gmail.com

Resumo—Os fenômenos físicos da natureza podem ser caracterizados através de modelos físicos e matemáticos, desde que elaborados adequadamente. Nesse contexto, o presente trabalho apresenta a aplicação de um modelo da Teoria da Elasticidade na forma de estudo relativo da análise estática de uma viga engastada. Elucidando a validade da abordagem, é apresentada a aplicação de um método numérico para a solução do problema proposto: Método dos Elementos Finitos (MEF). A aplicação efetiva do MEF foi realizada através da utilização de um software comercial e os resultados obtidos foram comparados com a solução analítica obtida através das teorias da elasticidade plana, conforme modelagem. Com isso, destacaram-se pontos de validação e eventuais diferenças entre os resultados analíticos e numéricos, tanto para deslocamentos quanto dos valores de tensão.

Palavras-chave—Viga, elasticidade, deslocamentos, tensões

I. INTRODUÇÃO

Vigas são elementos de sustentação que trabalham em posição horizontal ou inclinada, assentadas em um ou mais apoios, e que tem a função de suportar os carregamentos normais à sua direção [1].

Esse interesse se justifica devido ao grande número de estruturas mecânicas cujos comportamentos podem ser aproximados como modelos de vigas, entre as quais citam-se: estruturas aeronáuticas e veiculares, estruturas civis e elementos de máquinas como eixos, pás de turbinas e rotores [2].

Para situações simplificadas de carregamento e análise, geralmente considera-se o modelo de viga engastada, para os quais são considerados apenas os efeitos do momento fletor; o cisalhamento e a inércia de rotação são desprezados [3].

A análise estrutural estática de vigas pode ser realizada através da teoria da elasticidade linear, que consiste fundamentalmente na determinação dos deslocamentos e tensões produzidas na estrutura por um conjunto de ações externas, pressupondo certas condições de contorno do problema. Nesse caso, os sólidos elásticos lineares são submetidos a pequenas deformações, fazendo com que os componentes do campo de deslocamentos sejam aproximadamente uma combinação linear dos componentes do tensor de deformação do sólido [4, 5].

As vigas podem ser tratadas como modelos bidimensionais, pois é feita a hipótese de que a sua espessura é muito pequena

em relação ao seu comprimento e altura. A variação da sua tensão na espessura pode ser ignorada, e com isso suas componentes de tensão σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} são nulas. Portanto, o estado de tensões especificado somente por σ_x , σ_y e τ_{xy} é denominado Estado Plano de Tensão. Essas três componentes tornam-se funções somente de x e y [6].

A aplicação da teoria da elasticidade para a análise estática, apesar de eficiente, apresenta dificuldades em alguns casos. A adequada representação matemática do carregamento, geometria, condições de contorno e comportamento do material, por exemplo, por vezes apresentam-se de forma complexa. Tem-se assim a necessidade de se introduzir muitas hipóteses simplificadoras no problema para que possa ser encontrada a solução analítica. Para uma gama de problemas de engenharia, é necessário, portanto, ferramentas numéricas para a obtenção dos esforços. Nesse contexto, destaca-se o método dos elementos finitos (MEF) [7].

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico de aproximação largamente utilizado na análise estrutural. O MEF é um método de aproximação de soluções de equações diferenciais onde a equação diferencial é expressa em uma forma fraca (Problema Variacional de Valor de Contorno) e resolvida a partir da construção apropriada de espaços de aproximação através da utilização de subdomínios denominados elementos [8].

Desde o seu surgimento na década de 60, o MEF passou a ser cada vez mais utilizado, principalmente com as soluções comerciais de software que facilitam sua aplicação em problemas de engenharia. Nesse contexto, o presente trabalho faz uso de um software comercial (Ansys) para realizar a modelagem numérica do problema em estudo.

II. METODOLOGIA

O problema analisado trata-se de uma viga com uma vinculação do tipo engaste em uma das extremidades. Na extremidade oposta ao engaste há uma força distribuída F de valor $1,5kN/m$. O módulo de elasticidade do material equivale a $E = 23 \times 10^6 kN/m^2$ e o coeficiente de Poisson $\nu=0,2$. A Figura 1 mostra a viga em questão.

Primeiramente o problema foi analisado através da Teoria da Elasticidade, resultando em um campo de deslocamentos e

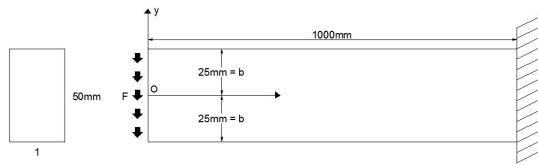


Figura 1. Viga analisada

de tensões. Analisando-se a 1, pode-se inferir que em relação as condições de contorno do problema, a tensão no eixo x , σ_x , é nula em $x = 0$. Também, a tensão no eixo y , σ_y , é nula em $\pm b$, assim como a tensão de cisalhamento τ_{xy} . Ainda, os deslocamentos nos eixos x e y , u_x e u_y , são funções de x e de y , e a rotação no engaste é zero.

Através das funções de Airy, pode-se chegar às funções que representam as tensões e os deslocamentos, conforme:

$$\sigma_x = \frac{3F}{2b^3}xy \quad (1)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3F}{4b^3}(y^2 + b^2) \quad (3)$$

$$u_x = \frac{3F}{4Eb^3}[x^2y - 2y^3(1 + 2\nu) - L^2y] \quad (4)$$

$$u_y = \frac{3F}{4Eb^3}[xy^2(3 + \nu) - \frac{x^3}{3} - b^2x(2 + 2\nu) + L^2x - Ly^2(3 + \nu) - \frac{2L^3}{3} + b^2L(2 + 2\nu)] \quad (5)$$

Essas relações atendem as equações de equilíbrio ($\sigma_{ij,j} + b_i = 0$); assim como às equações de compatibilidade, as leis constitutivas do material e as condições de contorno do problema.

No segundo momento, é utilizado o software comercial Ansys, versão 15.0, responsável pela análise do problema através do MEF. Na discretização do problema foram feitos testes de convergência até se chegar ao elemento, e seu tamanho ideal. Foi utilizado, portanto, o elemento Plane 183, de tamanho igual a 5 mm.

Os resultados encontrados em ambas as análises, bem como o erro percentual entre os valores, são dispostos na Tabela II. A malha utilizada pelo software se encontra na Figura 2



Figura 2. Malha utilizada

III. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Foi possível verificar que os resultados obtidos para a viga do exemplo com a modelagem computacional via Elementos Finitos ficaram muito próximos dos valores obtidos através da aplicação da Teoria da Elasticidade. Tanto os valores de tensão, quanto de deslocamentos são similares com os resultados analíticos do problema.

Tabela I
ANÁLISE DE RESULTADOS

Análise de resultados		Teoria da elasticidade	MEF (Ansys)
u_x (mm)	máx	0	-1,0088-15
	min	-3,9199	-3,13E-9
u_y (mm)	máx	1,8659E-14	0,0058
	min	-104,4261	-104,5000
σ_x (MPa)	máx	180	179,3600
	min	-180	-179,3600
τ_{xy} (MPa)	máx	2,2500	2,4030
	min	0	-0,2377

Como conclusão geral, pode-se dizer que para o problema proposto de viga, a solução via software de Elementos Finitos é confiável. Além de resultados compatíveis, a utilização do software nesse caso se mostrou uma ferramenta ágil para a análise das tensões e deslocamentos, visto que a resolução do problema através da Teoria da Elasticidade é extensa e relativamente complexa.

REFERÊNCIAS

- [1] L. G. Meriam, J. L. Kraige, Mecânica: estática, Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- [2] A. J. Torii, Análise Dinâmica de Estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado, Ph.D. thesis, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.
- [3] S. S. Rao, Mechanical Vibration, Pearson Prentice Hall, New Jersey, USA, 4 edn., 2004.
- [4] D. Vanderbilt, Matrix Structural Analysis, Quantum Publishers, 1974.
- [5] T. R. de Araujo, J. A. Silva, D. de Souza Rodrigues, M. V. F. Ribeiro, P. C. G. Junior, Metodologia de projeto de célula de carga de geometria "S" para medição estática de empuxo de motores de foguete, Conem 2012 - VII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2012.
- [6] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, Teoria da Elasticidade, 3 edn., 1934.
- [7] J. Zhu, Z. Taylor, O. Zienkiewicz, The finite element method: its basis and fundamentals, Elsevier, 2013.
- [8] K.-J. Bathe, Finite element procedures, Prentice-Hall, 1996.