

Simulação do escoamento em canais com entrada lateral pelo Método das Características

Héctor Mayol Novoa
Universidade Federal do Paraná
Programa de Pós Graduação em Engenharia
de Recursos Hídricos e Ambiental
Curitiba, Brasil
mayolnovoa@yahoo.com

Eloy Kaviski
Universidade Federal do Paraná
Departamento de Hidráulica e Saneamento
Curitiba, Brasil
Eloy.dhs@ufpr.br

Resumo—Neste trabalho analisou-se, para o caso unidimensional, o escoamento não permanente de água em um canal retangular avaliando a velocidade e profundidade em posições específicas do comprimento do canal e em instantes de tempo pré-fixados, e considerando também a entrada lateral em um trecho ao longo do canal. Optou-se pelo método das características em uma grade retangular. São apresentadas as equações do método das características para os cálculos de montante, pontos interiores e jusante no canal. Logo comparam-se as velocidades e profundidades com os calculados para o mesmo canal mas sem aporte lateral.

Palavras-chave—Escoamento não permanente em canais, Equações de Saint-Venant, Método das Características.

I. INTRODUÇÃO

As condições de escoamento nos sistemas reais em canais variam geralmente com o tempo e com o espaço, portanto os escoamentos são chamados de não uniformes e não permanentes. Essas variações devem-se a processos naturais, ações humanas ou devido a acidentes ou incidentes [4]. A análise do escoamento não permanente é geralmente mais complexa do que a análise do escoamento permanente. Para aplicações em uma dimensão os parâmetros mais importantes como a velocidades e a profundidade são funções do tempo e da distância. As equações diferenciais parciais de Saint-Venant descrevem os escoamentos não permanentes tendo em conta que as variáveis dependentes (profundidade e velocidade do fluxo) são funções das variáveis independentes (espaço e tempo). Soluções analíticas das equações básicas do escoamento não permanente são quase impossíveis devido a sua não linearidade [3]. As equações de Saint Venant somente podem ser solucionadas mediante técnicas numéricas aproximadas para alguns casos específicos. Existem vários métodos que podem ser utilizados para solucionar numericamente as equações de Saint Venant (equações da continuidade e dinâmica), como por exemplo: método das características, diferenças finitas, elementos finitos, volumes finitos, etc.

No método das Características, as equações são convertidas em formas características as quais são resolvidas por um esquema de diferenças finitas. No método de Diferenças Finitas, as derivadas parciais são substituídas por quocientes de diferenças finitas e as equações resultantes são resolvidas para obter as condições não permanentes. No método de Elementos Finitos, o sistema é dividido num número de elementos e as equações diferenciais parciais são integradas nos pontos nodais dos elementos. A forma integral da equação da conservação é utilizada como ponto de partida pelo método dos volumes finitos. O domínio de solução é dividido num número finito de

volumes de controle (VC) contíguos, e a equação da conservação é aplicada a cada VC [5].

Este trabalho utiliza o método das Características para determinar velocidades e profundidades em diferentes seções de um canal de 400 m de comprimento. O canal conduz água em regime não permanente e possui entrada lateral em um trecho de 50 m. Devido a que existem poucas referências bibliográficas para escoamento não permanente em canais com entrada lateral, este estudo pretende apresentar um método de cálculo para os casos de canais com entrada lateral; depois dos cálculos, no final se faz uma comparação de valores com um canal das mesmas características hidráulicas mas sem entrada lateral.

II. EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT

Em um canal com fluxo de água em regime não permanente tanto as velocidades como as alturas mudam com o tempo e com o espaço. Baseado no teorema de transporte de Reynolds e aplicado a um volume de controle é possível obter duas equações diferenciais parciais de segunda ordem, hiperbólicas, que descrevem o movimento da água no canal em estado transiente, estas equações são chamadas de equações de Saint-Venant. Para a aplicação das equações de Saint Venant é necessário ter em conta certas suposições básicas para sua aplicação, entre elas que o fluxo seja unidimensional, que a distribuição de pressões seja hidrostática, a declividade no fundo pequena e a densidade da água seja constante [2].

Considerando fluxo unidimensional, as equações de Saint-Venant são:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial V}{\partial x} = q(t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{V}{A} q(t) + \frac{g}{B} \frac{\partial A}{\partial x} = g(S_o - S_f) \quad (2)$$

Onde, $A(x,t)$ é a área da seção transversal, $V(x,t)$ é a velocidade, $q(t)$ é o fluxo lateral uniforme distribuído ao longo ou em trechos do canal, x é a distância ao longo do canal, t é o tempo, B é a largura do canal na superfície da água, g é a aceleração devido à gravidade, S_o é a declividade do fundo e S_f é a declividade devido a resistência ao escoamento. Nota-se que $(V/A)q(t)$ é o termo de momento devido ao fluxo lateral. A

declividade da linha de energia, S_f , pode ser obtido por meio da fórmula de Manning [7]:

$$S_f = \frac{V|V|n^2}{R^{4/3}} \quad (3)$$

Onde, n é o coeficiente de Manning ou coeficiente de atrito; e R é o Raio hidráulico.

III. MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

Como foi descrito na seção anterior as equações de Saint-Venant constituem um sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas que na maioria dos problemas somente podem ser solucionados numericamente. Existem vários métodos que podem ser utilizados para solucionar numericamente. O método das Características é um deles e é uma técnica matemática que partindo-se de duas equações diferenciais parciais obtém-se quatro equações diferenciais ordinárias. Duas destas equações correspondem à Característica C^+ e as outras duas à Característica C^- . Estas equações são resolvidas aplicando-se o esquema de diferenças finitas no plano $x-t$ [3].

Em um canal retangular uma pequena perturbação na superfície pode-se propagar tanto para montante como para jusante. Para ondas de águas rasas, a celeridade desta perturbação pode ser calculada como $C = \sqrt{gA/B}$ e para canal retangular $C = \sqrt{gd}$ [4], onde d é a profundidade do canal. Essa celeridade é a velocidade do movimento do fluido antes da perturbação. No entanto a velocidade do fluxo é chamada de V e a velocidade absoluta para um observador localizado na margem do rio é $(V+C)$ [3].

Mediante um processo de derivação da equação de celeridade C em relação ao tempo e ao espaço e substituindo nas equações (1) e (2) obteve-se as seguintes equações Características para canais retangulares [3]:

$$\frac{d}{dt}(V + 2C) = -g(S_f - S_o) \quad \text{Característica positiva (4)}$$

$$\frac{d}{dt}(V - 2C) = -g(S_f - S_o) \quad \text{Característica negativa (5)}$$

$$\frac{dx}{dt} = V + C \quad \text{Característica } C^+ \quad (6)$$

$$\frac{dx}{dt} = V - C \quad \text{Característica } C^- \quad (7)$$

Para um canal horizontal ($S_o=0$) e sem atrito ($S_f=0$), o sistema de equações característica (4) e (5) torna-se:

$$V + 2C = \text{constante}$$

$$V - 2C = \text{constante}$$

As constantes $(V + 2C)$ e $(V - 2C)$ são chamados de Invariantes de Riemann [3].

As equações (4) a (7) são equivalentes as equações (1) e (2). Nas Figuras 1 e 2 mostram-se as curvas características para fluxo subcrítico e supercrítico, respectivamente.

As equações (1) e (2) também podem ser expressas em outra forma de Características segundo a referência [1]:

$$\frac{1}{c} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} = S_o - S_f - \frac{q}{gA} (V - C) - \frac{VC}{gA} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_V = G_f \quad (8)$$

$$\frac{dx}{dt} = V + C \quad (9)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} = S_o - S_f - \frac{q}{gA} (V - C) - \frac{VC}{gA} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_y = G_b \quad (10)$$

$$\frac{dx}{dt} = V - C \quad (11)$$

Os termos G_f e G_b são colocados por conveniência e fazem referência aos termos em Inglês $f = \text{forward}$ (jusante) e $b = \text{backward}$ (montante)

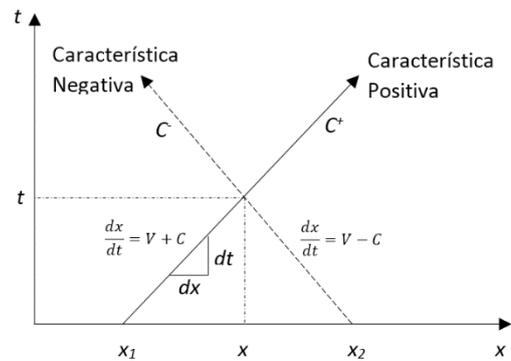


Fig. 1 Características para fluxo subcrítico.
Fonte: Chanson, 2004 [3]

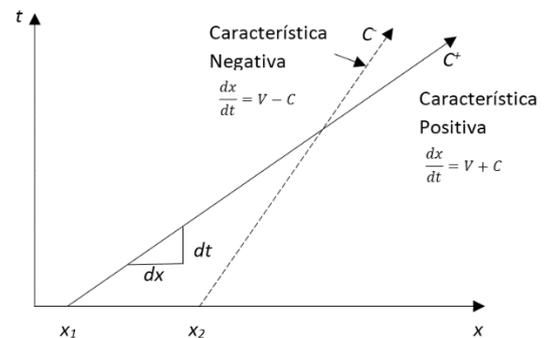


Fig. 2 Características para fluxo supercrítico.
Fonte: Chanson, 2004 [3]

Na literatura científica existem basicamente dois métodos das Características para a solução das equações de Saint-Venant para escoamento com superfície livre. Eles são, o método de Características de malha retangular e o método de Características de distâncias específicas. Estes dois métodos aceitam formulação direta e formulação iterativa. A seguir explica-se o método da malha retangular que está fundamentado na metodologia desenvolvida por Sivaloganathan (1978) [8].

O esquema de cálculo do método das Características de malha retangular está baseado na Figura 3, onde se mostra o plano $x-t$ para os cálculos seguintes. No início dos cálculos, a distância Δx é especificada e permanece o mesmo durante todo o processo de cálculo. Os intervalos de tempo no eixo vertical não são especificados no início dos cálculos, no entanto são determinados em cada etapa do cálculo. Para a determinação do intervalo do tempo seguinte, a condição de Courant pode ser utilizada e assim evitar erros de exatidão, ela estabelece que $\Delta t \leq \Delta x / |V+C|$.

Se os valores de profundidade y , e velocidade V , são conhecidos nos pontos da malha ao longo da linha de tempo $t = t_1(A_1A_n)$ os cálculos são: o valor de Δt é escolhido para satisfazer a condição de Courant e a solução é continuada para pontos da malha para a linha do tempo $t = t_1 + \Delta t$, isso é a linha B_1B_n . Desde a linha de tempo de B_1B_n os cálculos são seguidos para frente até um tempo desejado. A afirmação anterior significa que não há uniformidade em sucessivos intervalos do tempo. Tudo isso significa que se for desejada a velocidade e a profundidade num determinado ponto, eles deverão ser obtidos com informação da linha do tempo anterior.

Os detalhes de cálculo estão estreitamente ligados as condições do regime de fluxo, que podem ser subcrítico, crítico ou supercrítico. Assim, esses regimes podem ocorrer no contorno de montante ou de jusante ou entre eles.

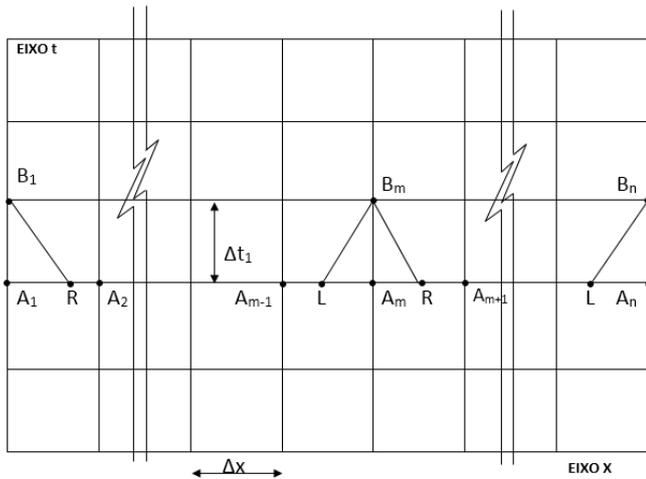


Fig. 3 Malha retangular para o Método das Características
Fonte: Sivaloganathan, 1978 [8].

i) Contorno de Montante

a) Escoamento Subcrítico. A linha B_1R é uma Característica negativa que passa pelo ponto B_1 . Para localizar o ponto R se assume que a declividade de B_1R é a mesma que a declividade da Característica negativa que passa por A_1 . Quando já se tem localizado o ponto R , os valores de velocidade V_R e profundidade y_R que correspondem ao ponto R são determinados por interpolação linear utilizando os pontos próximos a R , neste caso A_1 e A_2 . A equação de compatibilidade ao longo da Característica negativa B_1R é escrita em forma de diferenças finitas,

$$-\frac{y_{B1} - y_R}{C_b \Delta t} + \frac{V_{B1} - V_R}{g \Delta t} = G_b \quad (12)$$

Onde C_b e G_b são avaliados em R . Se a condição de contorno de montante é o hidrograma de descarga então a seguinte equação se cumpre:

$$V_{B1} - \frac{Q(0, t_{B1})}{A(y_{B1}, 0)} = 0 \quad (13)$$

Isolando V_{B1} das equações (12) e (13) resulta uma equação não linear em y_{B1} que pode ser resolvida pelo método de Newton Raphson.

b) Escoamento Supercrítico. Quando as condições no contorno de montante são supercríticas y_{B1} ou V_{B1} são dados e o outro facilmente é obtido, isto é, se y_{B1} é dado então se acha V_{B1} e ao revés.

ii) Pontos interiores

Os valores B_mL e B_mR são Características positiva e negativa que passam pelo ponto B_m . Os valores da declividade de B_mL e B_mR são assumidos iguais as declividades das Características positiva e negativa, respectivamente que passa pelo ponto A_m . Os valores de velocidades V e profundidade y nos pontos L e R são obtidos pela interpolação linear com valores próximos de L e R na linha A_1A_n . As equações de compatibilidade ao longo das Característica positiva LB_m e negativa RB_m são escritas na forma de diferenças finitas,

$$-\frac{y_{Bm} - y_L}{C_f \Delta t} + \frac{V_{Bm} - V_L}{g \Delta t} = G_f \quad (14)$$

$$-\frac{y_{Bm} - y_R}{C_b \Delta t} + \frac{V_{Bm} - V_R}{g \Delta t} = C_b \quad (15)$$

Onde C_b e G_b são avaliados em R e C_f e G_f são avaliados em L . As equações (14) e (15) são lineares em y_{Bm} e V_{Bm} e de fácil solução.

iii) Contorno de Jusante

a) Escoamento Subcrítico. A linha B_nL é a Característica positiva que passa pelo ponto B_n . Para localizar o ponto L é assumido que a declividade de LB_n é a mesma que a declividade da Característica positiva que passa pelo ponto A_n . Localizado o ponto L , os valores de profundidade y_L e a velocidade V_L são obtidos por interpolação sobre pontos da malha à esquerda ou direita de L se for usada interpolação linear. As equações de compatibilidade ao longo da Característica positiva LB_n são expressas na forma de diferenças finitas,

$$\frac{y_{Bn} - y_L}{C_f \Delta t} + \frac{V_{Bn} - V_L}{g \Delta t} = G_f \quad (16)$$

Onde C_f e G_f são avaliados em L. Neste caso geralmente a condição de contorno de jusante é a curva profundidade-vazão a qual fornece outra equação envolvendo y_{Bn} e V_{Bn} . Para uma condição de livre saída esta será,

$$C_{Bn} - V_{Bn} = 0 \quad (17)$$

Isolando V_{Bn} das equações (16) e (17) resulta uma equação não linear em y_{Bn} que pode ser resolvida pelo método de Newton Raphson. Logo a equação (17) fornece V_{Bn} .

b) Escoamento Supercrítico. Na Figura 4, o ponto L é localizado como nos casos anteriores assumindo a linha Característica positiva reta a traves no ponto B_n e com a declividade da Característica positiva que passa pelo ponto A_n . Os valores de profundidade y_L e velocidade V_L são também obtidos como nos casos anteriores por interpolação. A linha curva LP representa a curva Característica positiva que passa pelo ponto L e a linha curva A_nP representa a curva Característica negativa que passa pelo ponto A_n . Os valores da distância x_P , tempo t_P , profundidade y_P e velocidade V_P são agora determinados usando conceitos de “pontos interiores” no método de Características de Malha Retangular de Distâncias Especificadas desenvolvido por Sivaloganathan [8]. Da Figura 4, se o ponto x_P está à esquerda do ponto x_{A_n} os cálculos se fazem como no caso (a). Se o ponto x_P está à direita do ponto x_{A_n} os seguintes cálculos deveram ser feitos. Valores no ponto S, como a profundidade y_s , velocidade V_s e distância desde a origem x_s são determinados por interpolação linear entre valores em P e L. Valores de y_T , V_T e x_T são determinados por interpolação linear entre valores em P e A_n . Finalmente os valores de y_{Bn} e V_{Bn} são determinados por interpolação linear entre valores em S e T.

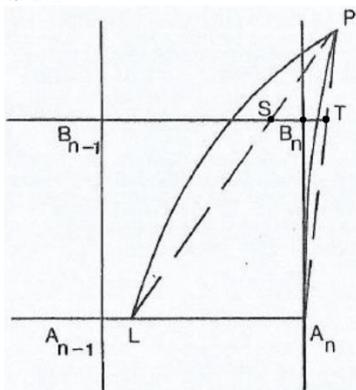


Fig. 4 Malha retangular para Jusante no regime supercrítico
Fonte: Sivaloganathan, 1978 [8].

IV. ESTUDO DE CASO

Problema do Canal Retangular. Considere um canal retangular, Fig. 5, de 400m de comprimento, 5m de altura, $B=1m$ de largura, declividade $S_{ox}=0$, $S_f=0$. Inicialmente o canal está cheio de água e a mesma encontra-se parada, ou seja, a velocidade inicial é zero ($V_0=0$). A celeridade C é dada por $C = \sqrt{gy}$, onde g é a constante gravitacional e y é a altura.

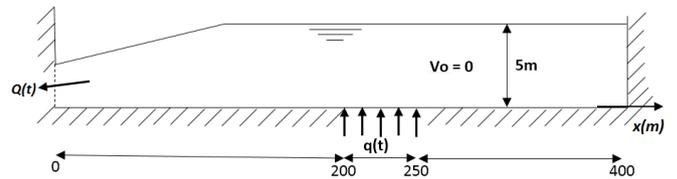


Fig. 5 Canal com descarga a esquerda e fluxo lateral

(15)

Considere a descarga a esquerda, dada pela função vazão $Q(t)$, definida por:

$$Q(t) = \begin{cases} -0,1t & \text{se } t \geq 0 \text{ e } t < 60 \\ -6 + 0,1(t - 60) & \text{se } t \geq 60 \text{ e } t < 80 \\ -4 & \text{se } t \geq 80 \end{cases}$$

Pretende-se calcular a propagação da onda pelo método das características, isso é, determinar a profundidade e a velocidade para diferentes seções ao longo do canal além de considerar um fluxo lateral dado pela seguinte relação:

$$q(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 200 \text{ e } 250 \leq x \leq 400 \\ 0,125t & \text{se } 0 \leq t \leq 40 \\ 3 + 0,033(100 - t) & \text{se } 40 < t \leq 100 \\ 3 & \text{se } t > 100 \end{cases}$$

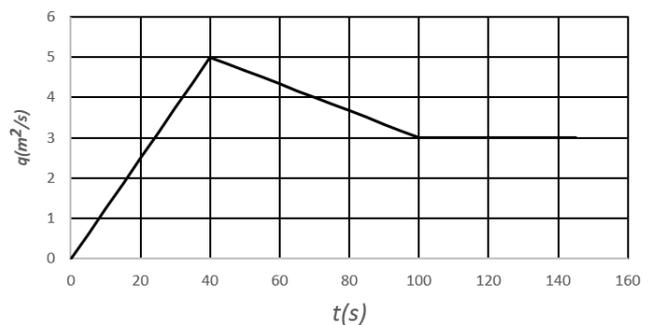


Fig. 6 Fluxo lateral uniforme $q(x,t)$

V. MÉTODO

Os cálculos de velocidade e profundidade para pontos a montante e jusante se fazem seguindo o método das Características considerando regime subcrítico, como mostrado na Figura 7.

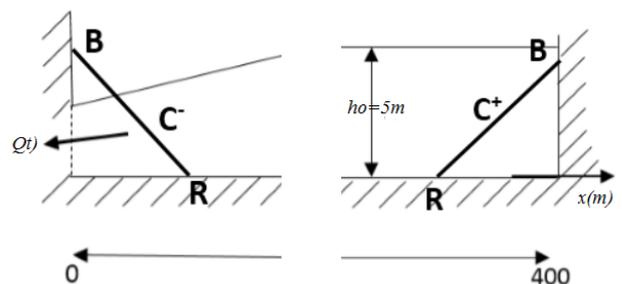


Fig. 7 Características na montante (à direita) e jusante (à esquerda)

Para pontos no interior do canal, deve-se ter em conta que há trechos sem aporte lateral ($x=0-200m$ e $x=250-400m$) e um trecho que tem aporte lateral ($x=200-250m$)

Para o trecho com aporte lateral os cálculos são os seguintes. A partir das equações (8) e (10) com $S_0=0$, $S_f=0$, para o canal prismático ($\partial A/\partial x = 0$) tem-se:

$$\pm \frac{1}{C} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} = \frac{q}{gA} (V - C) \quad (18)$$

Para o canal retangular de largura B , ($B=1m$, para esta aplicação)

$$A = By, \quad C = \sqrt{gy}, \quad y = \frac{C^2}{g}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2C}{g} \frac{dC}{dt} \quad (19)$$

(19) em (18) transforma-se em:

$$d(\pm 2C + V) = -\frac{qg}{BC^2} (C - V) dt \quad (20)$$

Baseado na Fig. 8 e a equação (20) é possível achar relações entre os pontos no tempo t e no tempo $t+\Delta t$ mediante as Características C^+ e C^- :

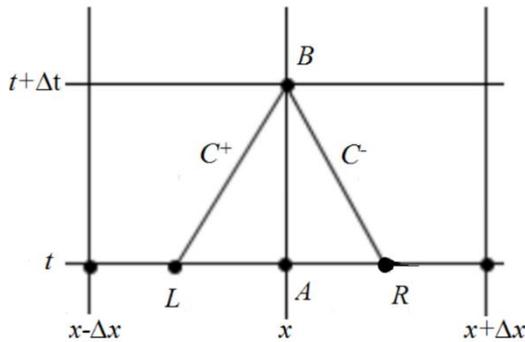


Fig. 8 Pontos interiores.

$$2C_B + V_B - (2C_L + V_L) = -\frac{g}{2B} \left(q_L \frac{C_L - V_L}{C_L^2} + q_B \frac{C_B - V_B}{C_B^2} \right) \Delta t \quad (21)$$

$$-2C_B + V_B - (-2C_R + V_R) = -\frac{g}{2B} \left(q_R \frac{C_R - V_R}{C_R^2} + q_B \frac{C_B - V_B}{C_B^2} \right) \Delta t \quad (22)$$

Logo mediante operações algébricas entre as equações (21) e (22) calcula-se a celeridade da onda C_B :

$$C_B = \frac{g\Delta t}{8B} \left[-q_L \frac{(C_L - V_L)}{C_L^2} + \frac{(2C_L + V_L)(2B)}{g\Delta t} + q_R \frac{(C_R - V_R)}{C_R^2} - \frac{(-2C_R + V_R)(2B)}{g\Delta t} \right] \quad (23)$$

Com o valor encontrado de C_B é possível achar a profundidade y_B a partir de $C = \sqrt{gy}$, ($y_B = C_B^2/g$). A

velocidade V_B se calcula também entre as equações (21) e (22) assim:

$$V_B = \frac{\left[-q_L C_B^2 \frac{(C_L - V_L)}{C_L^2} - q_B C_B - \frac{2C_B^2(2B)}{g\Delta t} + \frac{2bC_B^2(2C_L + V_L)}{g\Delta t} \right]}{\left[\frac{2bC_B^2}{g\Delta t} - q_B \right]} \quad (24)$$

Para pontos interiores fora no trecho ($x=200-250m$), utiliza-se a equação (21) e (22) com a vazão lateral igual a zero ($q=0$). Resultando as equações:

$$2C_B + V_B - (2C_L + V_L) = 0 \quad (25)$$

$$-2C_B + V_B - (-2C_R + V_R) = 0 \quad (26)$$

Destas duas equações encontram-se C_B e V_B :

$$C_B = \frac{1}{4}(V_L - V_R) + \frac{1}{2}(C_L + C_R) \quad (27)$$

$$V_B = \frac{1}{2}(V_L - V_R) + C_L + C_R \quad (28)$$

VI. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para aplicar o método das Características foi necessário utilizar os seguintes parâmetros: comprimento do canal $L=400m$, quantidade de divisões ao longo do canal igual a 10, saída de água do canal em $x=0$, a entrada de fluxo lateral no trecho $200m$ a $250m$. Os valores de profundidade e velocidade para $q=0$ foram extraídos da referência [6]. O compilador usado foi o Free Pascal-Lazarus e o tempo de processamento foi de 82 segundos num computador Intel® Core i7, 1.66 Hz com sistema operativo de 64 bits.

As Tabelas I e II mostram a comparação das soluções para a profundidade e velocidade em dez secções no canal com e sem entrada lateral de água para os tempos $t=90s$ e $t=150s$.

TABELA I. PROFUNDIDADES (m), $q(m^2/s)$

x(m)	t(s)			
	90		150	
	$q=0$	$q \neq 0$	$q=0$	$q \neq 0$
0	4,367	3,319	3,518	1,827
40	4,367	3,388	3,569	1,798
80	4,282	3,315	3,607	1,966
120	4,108	3,198	3,632	2,080
160	4,032	3,164	3,647	2,134
200	4,106	3,235	3,652	3,269
240	4,157	5,360	3,628	5,314
280	4,194	5,007	3,559	5,038
320	4,219	5,006	3,483	5,038
360	4,234	5,006	3,569	5,038
400	4,239	5,006	3,773	5,038

TABELA II. VELOCIDADES (m/s), $q(m^2/s)$

x(m)	t(s)			
	90		150	
	q = 0	q ≠ 0	q = 0	q ≠ 0
0	-0,916	-1,205	-1,137	-2,190
40	-0,916	-0,850	-0,878	-2,006
80	-1,045	-0,720	-0,635	-1,342
120	-1,311	-0,642	-0,402	-0,774
160	-1,404	-0,332	-0,176	-0,295
200	-1,150	0,000	0,045	0,000
240	-0,903	0,126	0,232	0,101
280	-0,668	0,009	0,357	0,014
320	-0,441	0,006	0,484	0,010
360	-0,220	0,003	0,340	0,005
400	0,000	0,000	0,000	0,000

A comparação dos resultados mostrados nas Figuras 9 e 10 estabelecem claramente que para o caso das profundidades a entrada lateral de água incrementa o nível de água a partir de 250m, e para o caso das velocidades devido a entrada lateral estas diminuem. O ponto de saída do canal está localizado em $x=0$, sendo que as velocidades negativas na Tabela II indicam que a saída da água é para esquerda.

VII. CONCLUSÃO

Neste trabalho o método das Características de malha retangular foi aplicado para solucionar um problema de escoamento não permanente num canal com entrada lateral não permanente.

Pelos resultados obtidos conclui-se que a entrada lateral influencia os valores de profundidade e velocidades no canal durante o escoamento ao longo do canal.

Os resultados obtidos apresentam coerência física como o que se esperaria obter por meio de experimentos.

REFERÊNCIAS

- [1] M. B. Abbott, "An Introduction to the Method of Characteristics", American Elsevier Co., New York, N.Y., 1996
- [2] F. M. Henderson, "Open Channel Flow", The Macmillan Company, New York, N.Y., 1966.
- [3] H. Chanson, "The Hydraulics of Open Channel Flow: An Introduction", 2nd ed., Oxford, UK 2004.
- [4] M. H. Chaudhry, "Open Channel Flow", 2nd ed. New York, N.Y. 2008.
- [5] M. H. Chaudhry, "Applied Hydraulic Transient", 1st ed. New York, N.Y. 1979. , pp. 382-395.
- [6] A.M. Lobeiro, "Solução das Equações de Saint-Venant em uma e duas Dimensões usando o Metodo das Características", Universidade Federal de Paraná, Programa de Pos Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Tese para Obtenção do Título de Doutor em Ciências. 2012.
- [7] K. Mahmood e V. Yevjevich, "Unsteady Flow In Open Channels", Water Resources Publications, Fort Collins, 1975.
- [8] K. Sivaloganathan "Flood Routing by Characteristics Methods", Journal of The Hydraulics Division, ASCE, Vol. 104, No. HY7, July 1978, pp.1075.

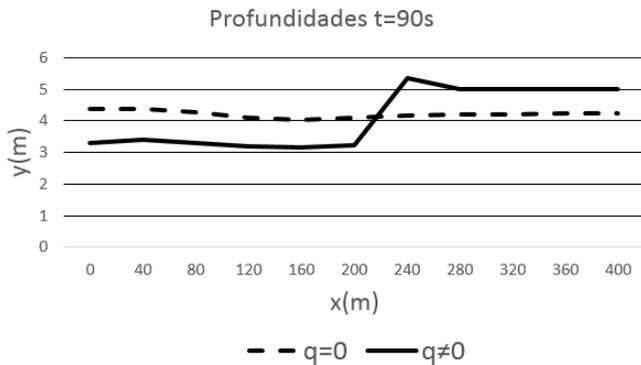


Fig. 9 Profundidades para $q=0$ e $q \neq 0$

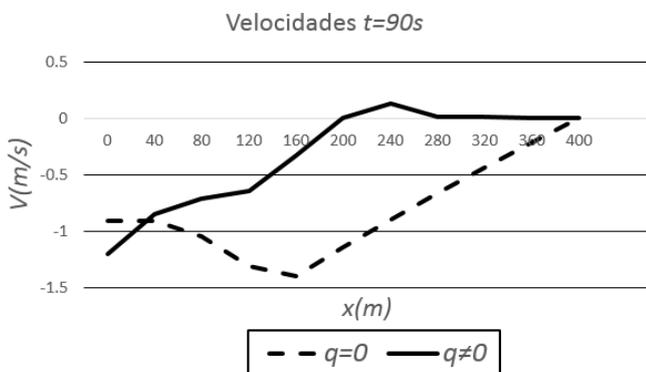


Fig. 10 Velocidades para $q=0$ e $q \neq 0$