

Um modelo numérico acoplado para a estimativa de OD-DBO

Jessyca Petry Dalazen
Universidade Federal do Paraná
PPGEA
Curitiba, Brasil
jessycapd@ufpr.br

Cynara de Lourdes da Nóbrega Cunha
Universidade Federal do Paraná
PPGEA/PPGMNE
Curitiba, Brasil
cynara@ufpr.br

Resumo—O Oxigênio Dissolvido e a Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO) são parâmetros utilizados para indicar a qualidade de água em corpos hídricos. A modelagem de OD e DBO acontece através da solução das equações diferenciais parciais que descrevem as variações de concentrações com o tempo e o espaço devido ao transporte advectivo, difusivo e às reações cinéticas. Nesse contexto, o presente trabalho desenvolveu uma solução numérica que resolve de forma acoplada as equações do modelo OD-DBO, as quais foram discretizadas no tempo pelo método do fatoramento implícito e no espaço pelo método de diferenças finitas, utilizando um esquema centrado. Foram realizadas simulações de lançamento de cargas orgânicas para quatro cenários distintos, sendo que no cenário 1 foi usada uma solução numérica mais simples e os resultados gerados foram convergentes com a solução analítica de Streeter-Phelps, validando assim a solução proposta. Já nos Cenários 2, 3 e 4 foi utilizada uma solução numérica mais complexa e também foram gerados resultados satisfatórios. Portanto, o esquema numérico usado mostrou-se capaz de resolver a dinâmica da poluição das águas por lançamentos de cargas de matéria orgânica.

Palavras-chave—oxigênio dissolvido; demanda bioquímica de oxigênio; modelagem ambiental.

I. INTRODUÇÃO

Diversos parâmetros podem representar a qualidade da água, caracterizando efeitos de poluição por despejos orgânicos. O Oxigênio Dissolvido (OD) é o principal dentre esses parâmetros, uma vez que sua presença é fundamental para os organismos aeróbicos e a redução dos seus níveis pode implicar na morte de diversos seres aquáticos. Essa redução é causada pela presença da matéria orgânica, geralmente advinda de lançamentos de esgotos, posto que durante o uso e a estabilização da mesma, micro-organismos consomem OD nos seus processos metabólicos. O teor de matéria orgânica é indiretamente medido pela Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO), fato que a torna um indicador do potencial consumo de OD [9]. Portanto, o OD e a DBO são parâmetros bastante utilizados para indicar a qualidade de água em corpos hídricos [1].

A gestão da qualidade dos recursos hídricos possui como grande desafio garantir água de boa qualidade e em quantidade suficiente para a população [7]. Nesse contexto, a modelagem ambiental é uma importante ferramenta que auxilia na tomada de decisões diante de cenários adversos, permite uma visão integrada da dinâmica dos processos ambientais na massa

líquida de estudo e consegue prever situações simulando cenários futuros, tornando-a indispensável para planejar operações de contenção de poluentes advindos de derrames acidentais, lançamentos de efluentes, etc [4].

O modelo OD-DBO é desenvolvido através da solução da equação diferencial parcial que descreve as variações das concentrações com o tempo e o espaço devido ao transporte advectivo, difusivo e às reações cinéticas. Os primeiros trabalhos de modelagem nos meios aquáticos surgiram na década de 1920, como o modelo desenvolvido por Streeter e Phelps em 1925, que tinha como foco a avaliação das concentrações de OD em rios e estuários, servindo de base para diversos modelos utilizados nos dias atuais. Em meados de 1970, a atenção voltou-se para problemas de eutrofização em ecossistemas aquáticos e os primeiros modelos que representariam a dinâmica da cadeia alimentar aquática foram desenvolvidos, como os de Chen (1970), Chen e Orlob (1975) e Di Toro, Thomann e O'Connor (1971). Atualmente, o desenvolvimento de modelos está voltado a problemas envolvendo substâncias tóxicas, patogênicos e metais pesados, dado que os mesmos comprometem a saúde humana [2].

Modelos refinados de qualidade de água para OD e DBO foram desenvolvidos por [5] considerando um grande número de parâmetros físicos e variáveis de entrada, como o efeito da carga difusa, demanda bentônica de oxigênio, fotossíntese, respiração, sedimentação da matéria orgânica e variação longitudinal do fluxo de massa baseada em reações de decaimento de primeira ordem da matéria orgânica. A aplicabilidade do modelo foi validada através da comparação com dados de qualidade de água coletados no Rio Kali, na Índia.

[6] desenvolveram um modelo analítico unidimensional de DBO com condição de contorno que descreve o lançamento de efluentes com concentrações representadas por uma variação senoidal. Os resultados gerados com este modelo foram validados com dados coletados no Rio Gomti, na Índia, e com conjuntos de dados disponíveis na literatura que já haviam sido usados para a validação de modelos analíticos comumente utilizados.

Assim sendo, os modelos de OD e DBO cada vez mais são utilizados como instrumentos que permitem diagnosticar e prognosticar cenários de qualidade de água, possibilitando compreender e visualizar o meio ambiente de forma integrada.

Devido à complexidade desses modelos, muitas vezes não há uma solução analítica para os mesmos, implicando na necessidade de simplificá-los. Usualmente as simplificações são feitas para que seja possível resolver de forma separada as equações diferenciais parciais de OD e DBO, visto que são equações não lineares e dependentes.

Nesse contexto, o presente trabalho propõe uma solução numérica para o modelo OD-DBO que resolva essas equações de forma acoplada, ou seja, todas as variáveis do problema são determinadas simultaneamente. A partir disso espera-se obter resultados mais realísticos e uma maior acurácia do modelo quando comparado com a solução analítica das equações de Streeter-Phelps, por exemplo.

II. MATERIAIS E MÉTODOS

Nesta seção serão apresentadas as equações do modelo unidimensional OD-DBO aplicado a rios, a solução numérica adotada para este modelo, a extrapolação utilizada e a solução analítica que é usada como referência para validar essas soluções.

A. Modelo matemático

As equações de transporte advectivo-difusivo das concentrações de OD (C) e DBO (L) são, respectivamente [8].

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \pm \sum R_C \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} + U \frac{\partial L}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \pm \sum R_L \quad (2)$$

Equações (1) e (2) são formadas por três parcelas: o transporte advectivo, o transporte difusivo e os processos de transformação que são resultantes das reações cinéticas [4] representadas por R_C e R_L e definidas, respectivamente, por (3) e (4). U é a velocidade longitudinal e D_L é o coeficiente de dispersão longitudinal, sendo que ambos são considerados uniformes e permanentes neste trabalho.

$$R_C = k_a(C_s - C) - k_d \left(\frac{C}{C + k_s} \right) L - \frac{SOD}{H} \quad (3)$$

$$R_L = -k_d \left(\frac{C}{C + k_s} \right) L - \frac{v_s(1 - f_D)}{H} L \quad (4)$$

A reação cinética de OD é representada por (3) e possui as parcelas de reeração, oxidação e demanda de oxigênio pelo sedimento. As parcelas de nitrificação, fotossíntese, respiração de fitoplâncton e zooplâncton não foram consideradas neste trabalho. A reação cinética de DBO, definida por (4), possui as parcelas de decomposição, dependente da concentração de OD, e de sedimentação, já as parcelas de ganho de matéria orgânica por detritos de herbivoria e morte de fitoplâncton e zooplâncton também não foram consideradas neste trabalho. (3) e (4) são descritas pela cinética de Michaelis-Menten.

A Tabela I apresenta as definições, valores e unidades dos parâmetros utilizados em (1), (2), (3) e (4).

Tabela I
PARÂMETROS UTILIZADOS NAS EQUAÇÕES DE OD E DBO.

Símbolo	Parâmetro	Valor	Unidade
C_s	Concentração de saturação de OD	9,02	$mg L^{-1}$
D_L	Coefficiente de dispersão longitudinal	25,00	$m^2 s^{-1}$
f_D	Fração da DBO dissolvida	0,50	—
H	Altura da coluna d'água	4,00	m
k_a	Coefficiente de reeração	1,38	dia^{-1}
k_d	Coefficiente de decomposição da DBO	0,90	dia^{-1}
k_s	Constante de meia saturação para oxidação da DBO	0,50	$mgOD L^{-1}$
SOD	Demanda de oxigênio no sedimento	1,00	$gO_2 m^{-2} d^{-1}$
U	Velocidade média longitudinal	0,20	$m s^{-1}$
v_s	Velocidade de sedimentação de substâncias orgânicas	0,01	$m dia^{-1}$

As condições iniciais e de contorno para (1) e (2) são definidas por:

$$C(x, t = 0) = C_{t_0} \quad (5)$$

$$L(x, t = 0) = L_{t_0} \quad (6)$$

$$C(x = 0, t) = C_{x_0} \quad (7)$$

$$L(x = 0, t) = L_{x_0} \quad (8)$$

$$UC - D_L \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = f_C \quad (9)$$

$$UL - D_L \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = f_L \quad (10)$$

onde C_{t_0} e L_{t_0} são as concentrações iniciais de OD e DBO no rio e C_{x_0} e L_{x_0} são as concentrações de OD e DBO na seção $x = 0$ m.

Em (9) e (10), f_C e f_L são os fluxos prescritos para OD e DBO na seção $x = \ell$. As partes advectivas de (9) e (10) podem ser desconsideradas em situações de efluxo advectivo no contorno, ou seja, as concentrações de OD e DBO na água que sai é definida pelo escoamento interno [4].

B. Solução numérica

Para a formulação da solução numérica, as derivadas de (1) e (2) são discretizadas no tempo pelo método do fatoramento implícito [1] e no espaço pelo método de diferenças finitas, utilizando um esquema centrado, dados por:

$$\begin{aligned} & \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + \frac{U}{2} \left(\frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{C_{i+1}^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) = \\ & \frac{D_L}{2} \left(\frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \\ & K_1 - k_a C_i^{n+1} - \frac{\phi}{2} (L_i^{n+1} C_i^n + L_i^n C_i^{n+1}) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{L_i^{n+1} - L_i^n}{\Delta t} + \frac{U}{2} \left(\frac{L_{i+1}^{n+1} - L_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{L_{i+1}^n - L_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) = \\ & \frac{D_L}{2} \left(\frac{L_{i+1}^{n+1} - 2L_i^{n+1} + L_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{L_{i+1}^n - 2L_i^n + L_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) - \\ & K_2 L_i^{n+1} - \frac{\phi}{2} (C_i^{n+1} L_i^n + C_i^n L_i^{n+1}) \end{aligned} \quad (12)$$

onde C_i^n e L_i^n representam, respectivamente, as concentrações de OD e DBO conhecidas no tempo n para uma seção transversal i e C_i^{n+1} e L_i^{n+1} representam, respectivamente, as concentrações de OD e DBO a serem descobertas no tempo $n + \Delta t$. Δx é o espaçamento entre as n_x seções transversais calculadas e Δt é o passo de tempo adotado.

Rearranjando e isolando no lado esquerdo os termos no tempo $n + \Delta t$, obtém-se:

$$\alpha C_{i-1}^{n+1} + \beta_i C_i^{n+1} + (\theta C_i^n) L_i^{n+1} + \gamma C_{i+1}^{n+1} = \lambda_i \quad (13)$$

$$\alpha L_{i-1}^{n+1} + (\theta L_i^n) C_i^{n+1} + \varphi_i L_i^{n+1} + \gamma L_{i+1}^{n+1} = \Upsilon_i \quad (14)$$

onde

$$K_1 = k_a C_s - \frac{SOD}{H} \quad (15)$$

$$K_2 = \frac{v_s(1 - f_d)}{H} \quad (16)$$

$$\phi = \frac{k_d}{C_i^* + k_s} \quad (17)$$

$$\alpha = -\frac{U\Delta t}{4\Delta x} - \frac{D_L\Delta t}{2\Delta x^2} \quad (18)$$

$$\beta_i = 1 + \frac{D_L\Delta t}{\Delta x^2} + k_a\Delta t + \frac{\phi}{2}\Delta t L_i^n \quad (19)$$

$$\varphi_i = 1 + \frac{D_L\Delta t}{\Delta x^2} + K_2\Delta t + \frac{\phi}{2}C_i^n \quad (20)$$

$$\gamma = \frac{U\Delta t}{4\Delta x} - \frac{D_L\Delta t}{2\Delta x^2} \quad (21)$$

$$\theta = \frac{\phi\Delta t}{2} \quad (22)$$

$$\lambda_i = \alpha C_{i-1}^n + \left(1 - \frac{D_L\Delta t}{\Delta x^2}\right) C_i^n - \gamma C_{i+1}^n + K_1\Delta t \quad (23)$$

$$\Upsilon_i = \alpha L_{i-1}^n + \left(1 - \frac{D_L\Delta t}{\Delta x^2}\right) L_i^n - \gamma L_{i+1}^n \quad (24)$$

O termo C_i^* , contido em ϕ , precisa ser extrapolado e, para isso, foi utilizada a seguinte função quadrática:

$$C_i^* = 1.875C_i^n - 1.25C_i^{n-1} + 0.375C_i^{n-2} \quad (25)$$

onde os valores de OD no tempo $n + \Delta t$ são extrapolados para cada seção transversal i utilizando os valores conhecidos nos tempos anteriores n , $n - \Delta t$ e $n - 2\Delta t$ [1].

C. Procedimento de cálculo

O sistema gerado por (13) e (14) é resolvido segundo o modelo a seguir, onde as duas equações são acopladas, sendo que as linhas ímpares representam o cálculo das concentrações de OD e as pares o cálculo das concentrações de DBO.

$$\zeta \times \chi = \Psi \quad (26)$$

onde

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \beta_2 & \theta C_2^n & \gamma & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \theta L_2^n & \varphi_2 & 0 & \gamma & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi = \begin{pmatrix} C_1^{n+1} \\ L_1^{n+1} \\ C_2^{n+1} \\ L_2^{n+1} \\ \vdots \\ C_{i=n_x}^{n+1} \\ L_{i=n_x}^{n+1} \end{pmatrix} \quad \Psi = \begin{pmatrix} C_1^n \\ L_1^n \\ \lambda_2 \\ \Upsilon_2 \\ \vdots \\ \frac{\Delta x}{U} f_C \\ \frac{\Delta x}{U} f_L \end{pmatrix}$$

ζ é a matriz pentadiagonal com dimensão $2n_x \times 2n_x$ dos parâmetros constantes, exceto por β_i e φ_i , que contêm os termos extrapolados previamente definidos. Já Ψ é o vetor com dimensão $2n_x$ que contém os termos independentes, ou seja, os valores conhecidos no tempo n . Por último, χ é o vetor com dimensão $2n_x$ dos valores a serem calculados no tempo $n + \Delta t$.

Para resolver o sistema acima foi desenvolvido um código computacional em linguagem Fortran que utiliza o conjunto de rotinas da biblioteca Lapack (*Linear Algebra Package*).

D. Solução analítica

O modelo analítico leva a uma solução exata [9] e por isso ele é utilizado para validar modelos numéricos. Porém, o modelo analítico possui algumas desvantagens em relação ao numérico utilizado neste trabalho, em razão de não ter dependência temporal e não possuir o termo *SOD*, o qual representa a demanda de oxigênio para decompor a matéria orgânica presente no sedimento. Além disso, no modelo analítico D_L e U são obrigatoriamente constantes e k_d não depende das concentrações de OD, dado que a constante de meia saturação k_s é nula.

As soluções analíticas de OD e DBO utilizadas neste trabalho são baseadas nas equações de Streeter-Phelps [8], dadas por:

$$0 = D_L \frac{d^2 D_{OD}}{dx^2} - U \frac{dD_{OD}}{dx} + k_d L - k_a D \quad (27)$$

$$0 = D_L \frac{d^2 L}{dx^2} - U \frac{dL}{dx} - k_d L \quad (28)$$

A concentração de OD é função de D_{OD} (déficit de OD):

$$C = C_s - D_{OD} \quad (29)$$

As soluções de (27) e (28) são dadas por [8]:

$$L = L_{x_0} e^{(j_{2d} x)} \quad (30)$$

$$D_{OD} = \frac{k_d}{k_a - k_d} \alpha_d L_{x_0} \left(\frac{e^{j_{2d} x}}{\alpha_d} - \frac{e^{j_{2a} x}}{\alpha_a} \right) \quad (31)$$

onde

$$\alpha_d = \sqrt{1 + \frac{4k_d D_L}{U^2}} \quad (32)$$

$$\alpha_a = \sqrt{1 + \frac{4k_a D_L}{U^2}} \quad (33)$$

$$j_{2d} = \frac{U}{2D_L} (1 - \alpha_d) \quad (34)$$

$$j_{2a} = \frac{U}{2D_L} (1 - \alpha_a) \quad (35)$$

Para que seja viável comparar a solução numérica com a analítica, é necessário fazer a simulação numérica das concentrações em um tempo suficientemente grande para que o sistema atinja o regime permanente.

III. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na presente seção serão apresentadas as simulações realizadas do lançamento de cargas orgânicas, representado pelas concentração L_{x_0} de DBO, na seção localizada em $x = 0$ m para quatro cenários distintos. Para os quatro cenários, foi considerado que o trecho simulado do rio tem eixo longitudinal ℓ predominante, ou seja, não são consideradas as variações transversais de concentração. Foram utilizados o espaçamento de grade de $\Delta x = 100$ m e o passo de tempo de $\Delta t = 100$ s para todos os cenários.

A. Cenário 1

O Cenário 1 é simulado a fim de validar o modelo numérico. Assim, é necessário tornar esse modelo mais simples para que seja possível comparar com o modelo analítico e, para isso, foi considerado que $SOD = 0$, $k_s = 0$ e $v_s = 0$, ou seja, não são consideradas a demanda de oxigênio pelo sedimento e a sedimentação da matéria orgânica. O trecho simulado possui comprimento igual a 30000 m e as condições iniciais adotadas para o cenário 1 são $C_{t_0} = C_s$ e $L_{t_0} = 0$ mgL^{-1} , as condições de contorno são $C_{x_0} = C_s$ e $L_{x_0} = 20$ mgL^{-1} e os fluxos prescritos f_C e f_L são considerados nulos.

A Fig. 1 representa a evolução temporal dos resultados obtidos para a solução numérica de OD e DBO para a seção localizada em $x = 18000$ m em relação ao ponto de lançamento. Através dela é possível observar que o modelo numérico atinge o regime permanente após um dia, o que torna possível a comparação entre a solução numérica e a solução analítica após cinco dias de simulação. Observa-se também que a concentração de OD diminui conforme a concentração de DBO aumenta, mostrando o consumo de oxigênio para decompor a matéria orgânica existente nessa seção.

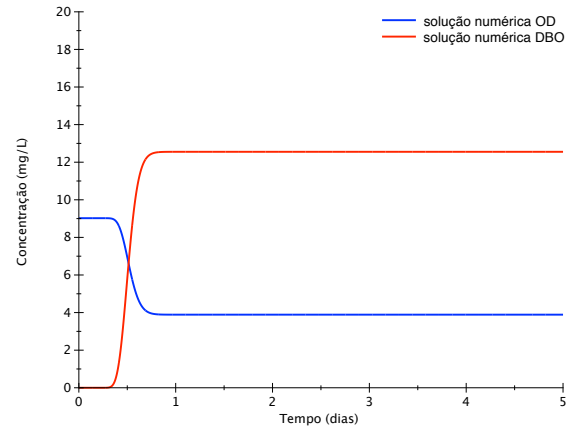


Figura 1. Evolução temporal da solução numérica das concentrações de OD e DBO para o Cenário 1 na seção localizada a 18000 m do ponto de lançamento.

A Fig. 2 representa os resultados obtidos para as concentrações de OD e DBO para todo o eixo longitudinal após cinco dias de simulação. Já a Fig. 3 representa os erros relativos de OD e DBO obtidos para o Cenário 1, que foram calculados por (36).

$$erro\% = \frac{|Sol_{num.} - Sol_{anal.}|}{Sol_{anal.}} \times 100 \quad (36)$$

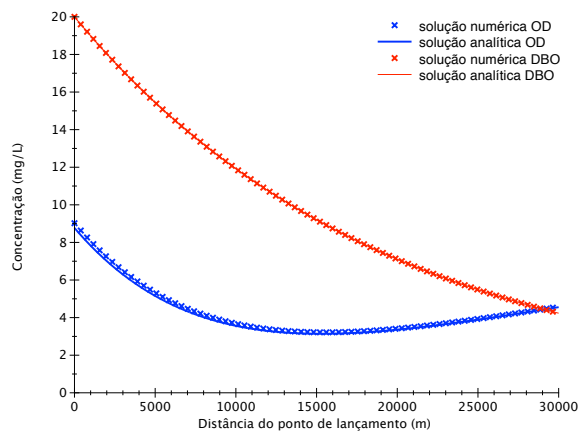


Figura 2. Evolução espacial da solução numérica e solução analítica das concentrações de OD e DBO para o Cenário 1, após 5 dias de simulação.

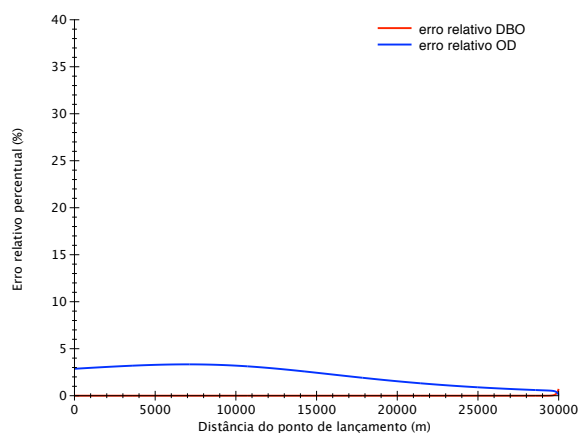


Figura 3. Evolução espacial do erro relativo da concentração de OD e DBO para o Cenário 1, após 5 dias de simulação.

Os resultados (Fig. 2 e 3) mostram que existe uma boa concordância entre a solução numérica e analítica, gerando erros relativos percentuais que não passam de 4% para o trecho simulado, validando o modelo proposto neste trabalho.

Através da Fig. 3 é possível observar que o erro relativo das concentrações de OD sofre uma ligeira elevação no início do trecho e depois cai gradualmente. Nota-se também que as condições de contorno em $x = 0m$ são diferentes para a solução numérica e analítica, fato que é explicado pelos efeitos dispersivos próximos à fonte. Já o erro relativo das concentrações de DBO permanece menor do que o erro de OD em quase todo o domínio.

B. Cenário 2

No Cenário 2 a simulação é mais complexa do que no Cenário 1 porque os parâmetros SOD , k_s e v_s passam a integrar a solução numérica, assumindo os valores mostrados na Tabela I. O trecho simulado possui comprimento igual a $30000m$ e as condições iniciais adotadas são: $C_{t_0} = C_s$ e $L_{t_0} = 0mgL^{-1}$, as condições de contorno são $C_{x_0} = C_s$ e $L_{x_0} = 20mgL^{-1}$ e os fluxos prescritos f_C e f_L são considerados nulos.

A Fig. 4 representa os resultados obtidos para as concentrações de OD e DBO para todo o eixo longitudinal após cinco dias de simulação e a Fig. 5 apresenta os erros relativos obtidos no Cenário 2.

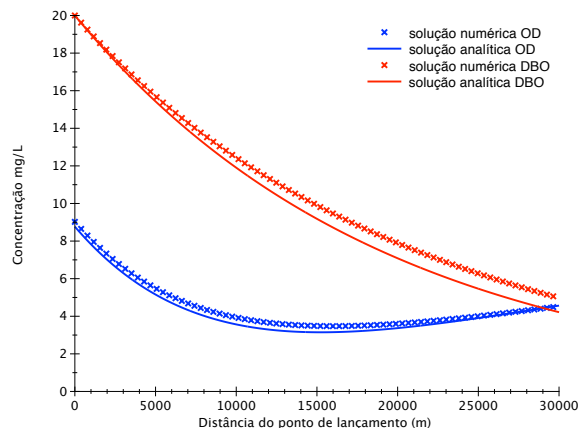


Figura 4. Evolução espacial da solução numérica e solução analítica das concentrações de OD e DBO para o Cenário 2, após 5 dias de simulação.

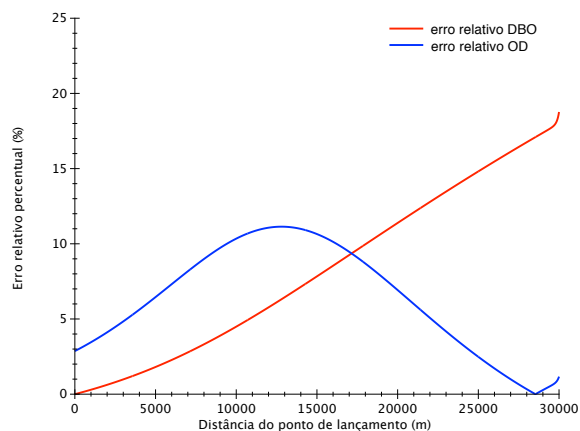


Figura 5. Evolução espacial do erro relativo da concentração de OD e DBO para o Cenário 2, após 5 dias de simulação.

As Fig. 4 e 5 mostram uma piora na concordância entre a solução numérica e a analítica, quando comparado com o Cenário 1, fato já esperado, visto que houve a inclusão das perdas de OD para o sedimento e da correção da oxidação a partir das concentrações de OD. A solução numérica, tanto para OD como para DBO, apresenta valores maiores do que a solução analítica em praticamente todo o trecho simulado (Fig. 4), ou seja, a decomposição da matéria orgânica é mais lenta e, por consequência, o consumo de oxigênio também.

O erro relativo das concentrações de OD aumenta até aproximadamente metade do domínio, onde atinge valores próximos de 12%, e depois diminui. Já o erro relativo das concentrações de DBO aumenta gradativamente, apresentando valores próximos de 20% no final do domínio.

Através da Fig. 5, nota-se uma subida brusca dos erros relativos percentuais de OD e DBO perto da seção transversal em

$x = 30000 \text{ m}$. Isso ocorre por causa das condições de contorno $f_C = 0$ e $f_L = 0$ impostas somente na solução numérica e não na analítica, implicando que as concentrações da solução numérica na última seção transversal seja igual a da penúltima seção. Porém, se o trecho simulado for suficientemente longo, é esperado que essas condições de contorno passem a ser válidas para a solução analítica (ver Cenário 3).

C. Cenário 3

Neste cenário também são considerados os parâmetros SOD , k_s e v_s (ver Tabela I), o trecho simulado possui comprimento igual a 80000 m e as condições iniciais adotadas são: $C_{t_0} = C_s$ e $L_{t_0} = 0 \text{ mgL}^{-1}$, as condições de contorno são $C_{x_0} = C_s$, $L_{x_0} = 20 \text{ mgL}^{-1}$ e os fluxos prescritos f_C e f_L são considerados nulos.

A Fig. 6 representa os resultados obtidos para as concentrações de OD e DBO para todo o eixo longitudinal após cinco dias de simulação e a Fig. 7 apresenta os erros relativos obtidos no Cenário 3.

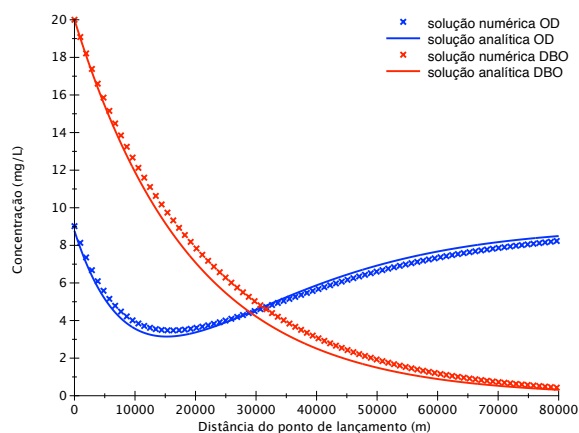


Figura 6. Evolução espacial da solução numérica e solução analítica das concentrações de OD e DBO para o Cenário 3, após 5 dias de simulação.

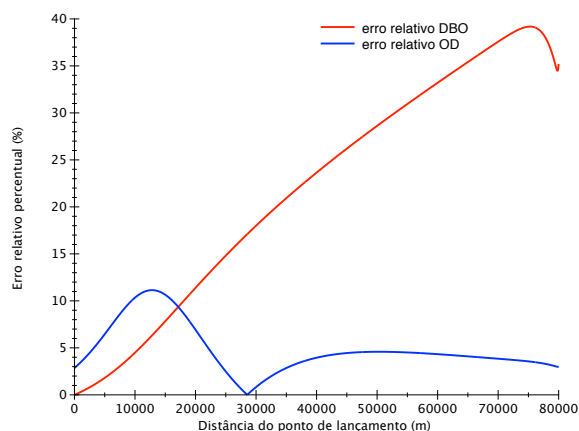


Figura 7. Evolução espacial do erro relativo da concentração de OD e DBO para o Cenário 3, após 5 dias de simulação.

Analisando a Fig. 7, é possível notar que a subida brusca do erro relativo, tanto para OD como para DBO, observada no

Cenário 2 (ver Fig. 5) é suavizada quando o trecho é estendido de 30000 m para 80000 m .

Através da Fig. 7 também é possível notar que o erro relativo das concentrações de DBO cresce linearmente ao longo do domínio, atingindo valores próximos a 40%, e no fim do trecho começa a cair novamente.

Já o erro relativo das concentrações de OD sobe no começo do domínio, atingindo seu pico próximo a 12%, começa a cair e atinge valores próximos de 0% na seção transversal em aproximadamente $x = 30000 \text{ m}$, onde volta a subir, mantendo seus valores próximos a 5%.

D. Cenário 4

Neste cenário também são considerados os parâmetros SOD , k_s e v_s (ver Tabela I), o trecho simulado possui comprimento igual a 30000 m e as condições iniciais adotadas são: $C_{t_0} = C_s$ e $L_{t_0} = 0 \text{ mgL}^{-1}$, as condições de contorno são $C_{x_0} = C_s$, $L_{x_0} = 40 \text{ mgL}^{-1}$ e os fluxos prescritos f_C e f_L são considerados nulos.

A Fig. 8 representa os resultados obtidos para as concentrações de OD e DBO para todo o eixo longitudinal após cinco dias de simulação. Para este cenário a solução numérica não foi comparada com a analítica, visto que a solução analítica utilizada neste trabalho não é adequada para ser usada com altas cargas de DBO.

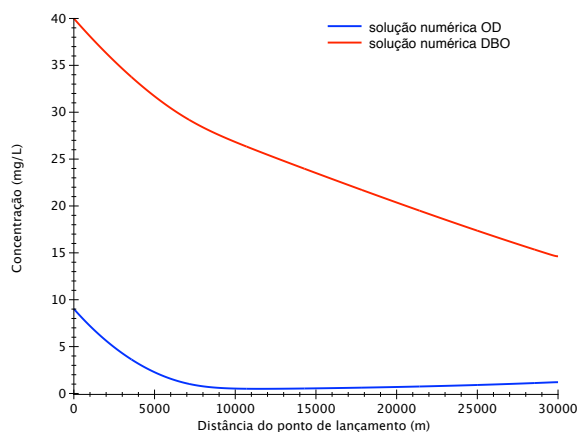


Figura 8. Evolução espacial da solução numérica e solução analítica das concentrações de OD e DBO para o Cenário 4, após 5 dias de simulação.

Com o aumento da carga orgânica introduzida no sistema, houve o aumento da taxa de desoxigenação, o que levou a solução numérica a apresentar concentrações de OD que ficam próximas de 0 mgL^{-1} , atingindo o estado anóxico, e que começam a aumentar de forma sutil no fim do domínio. Através da Fig. 8 também nota-se que as concentrações de DBO começam a cair de forma linear. Esse decaimento é devido somente à sedimentação da matéria orgânica, já que os micro-organismos não conseguem consumi-la por causa dos baixos níveis de OD.

IV. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi desenvolvida uma solução numérica que resolve de forma acoplada as equações dos modelos matemá-

ticos de OD e DBO, não fazendo simplificações geralmente feitas em outros modelos. Neste modelo foram incluídas as parcelas de difusão, advecção e de processos de transformação resultantes das reações cinéticas e o eixo longitudinal foi considerado predominante, implicando em um escoamento unidimensional. Assim, foram simulados quatro cenários distintos com específicas condições iniciais e de contorno.

A solução numérica proposta neste trabalho foi capaz de gerar resultados convergentes com a solução analítica dada por Streeter-Phelps, validando assim o modelo numérico desenvolvido. Isso foi observado pelos resultados obtidos no Cenário 1, onde o modelo numérico é simplificado a fim de se adequar ao analítico, gerando erros relativos percentuais abaixo de 5%.

Já para os Cenários 2, 3 e 4, onde o modelo é mais complexo do que o analítico, foi possível observar que a matéria orgânica é consumida mais rapidamente no modelo analítico, o que leva a menores concentrações de OD no corpo hídrico. Este fato torna o modelo analítico pouco eficiente para casos onde há uma maior descarga de matéria orgânica (Cenário 4).

Portanto, conclui-se que a solução numérica desenvolvida neste trabalho possui a capacidade de resolver a dinâmica da poluição das águas por lançamentos de cargas de matéria orgânica, como lançamento de esgotos, em conjunto com as concentrações de OD ao longo do trecho simulado e, por isso, espera-se que novos trabalhos referentes a este modelo possam ser desenvolvidos.

REFERÊNCIAS

- [1] C. L. N. Cunha, P. C. C. Rosman, A. P. Ferreira and T. C. N. Monteiro, *Hydrodynamics and water quality models applied to Sepetiba Bay*. Continental Shelf Research, 26:1940–1953, 2006b.
- [2] C. R. Fragoso Jr., T. F. Ferreira and D. M. Marques, *Modelagem Ecológica em ecossistemas aquáticos*, 1st ed. São Paulo, Brazil: Oficina de Textos, 2009.
- [3] M. F. de Oliveira, E. G. F. Mercuri and C. L. N. Cunha, *Solução numérica de um modelo acoplado para estimativa de OD-DBO*. Grupo de Mecânica Computacional, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brazil.
- [4] P. Rosman, *Referência técnica do SisBAHIA - sistema base de hidrodinâmica ambiental*. Programa COPPE: Engenharia Oceânica, Área de Engenharia Costeira e Oceanográfica, 2015.
- [5] R. Jha, C. S. Ojha and K. K. Bhatia, *Development of refined BOD and DO models for highly polluted Kali River in India*. Journal of Environmental Engineering, v. 133, n. 8, p. 839-852, 2007.
- [6] R. Jha and V. P. Singh, *Analytical Water Quality Model for Biochemical Oxygen Demand Simulation in River Gomti of Ganga Basin, India*. KSCE Journal of Civil Engineering, v. 12, n. 12, p. 141-147, 2008.
- [7] R. J. M. Sales, J. A. F. Araújo and S. H. Santos, *Aplicação das equações de Streeter-Phelps em rios que recebem fontes de poluentes pontuais e difusas para avaliar o comportamento das concentrações de oxigênio dissolvido*. Periódico eletrônico Fórum Ambiental da Alta Paulista, 10(12), 2014.
- [8] S. C. Chapra, *Surface water-quality modeling*. Boston, United States: WBC McGraw-Hill Companies Inc., 1997.
- [9] M. V. Sperling, *Estudos e modelagem da qualidade da água de rios*, 1st ed. Belo Horizonte, Brazil: Editora UFMG, 2007.