

# *Avaliação de concentradores de tensão em estruturas aplicando a técnica de submodelagem em elementos finitos*

*Jean Felipe Micoanski*

*Programa de Pós-Graduação em Engenharia de  
Construção Civil-PPGECC  
Universidade Federal do Paraná  
Curitiba, Brasil  
j.felipem@yahoo.com*

*Daniane Franciesca Vicentini*

*Departamento de Transportes e PPGECC  
Universidade Federal do Paraná  
Curitiba, Brasil  
vicentini@ufpr.br*

*O objetivo deste trabalho é estudar estruturas, com particular interesse em regiões com concentradores de tensões. Para isso, um modelo numérico de uma estrutura simples de barras é inicialmente elaborado, utilizando a técnica de submodelagem, que permite maior grau de acurácia nos resultados, além da melhoria na eficiência computacional. Utilizando elementos finitos, inicialmente é criado um modelo global cujos parâmetros mecânicos são extraídos, e a partir do qual é possível analisar e identificar potenciais concentradores de tensão. Em seguida o problema é particularizado para uma região específica de interesse, onde é possível obter uma malha localmente melhorada e suficientemente refinada para o grau desejado de resposta. Nessa região específica, parâmetros como as tensões máximas e mínimas obtidas (através do software ANSYS®) são comparadas com as calculadas analiticamente. Na presente pesquisa identificou-se que o uso do submodelo permitiu melhorar a resposta para tensão máxima e mínima na região estudada. A técnica foi ainda empregada na análise de uma placa plana com fissura, objetivando obter o fator de intensidade de tensão. Porém, verificou-se que nesse caso, o emprego da submodelagem na análise não proporcionou maior acurácia nos resultados, comparados com a resposta analítica do problema. Neste trabalho, o modelo é aplicado a uma estrutura simples de barras e a uma placa plana com fissura, mas em trabalhos futuros pretende-se ampliá-lo, a fim de aplicar a técnica a estruturas com geometrias mais complexas, tais como pontes ferroviárias em estruturas metálicas.*

**Palavras-chave** — *análise estrutural, submodelo, concentradores de tensão, elementos finitos, pontes ferroviárias.*

## **I. INTRODUÇÃO**

A submodelagem é uma técnica de elementos finitos com o objetivo de melhorar os resultados em uma certa região de interesse. Segundo [1], na modelagem de fissuras por fadiga são necessárias malhas bem refinadas em pontos específicos, porém o refinamento em uma região determinada de um modelo pode resultar em aumento significativo do custo computacional. Nesse contexto, a submodelagem aparece como uma alternativa que consome menos recursos. Essa técnica tem sido utilizada por [2], [3] no estudo de propagação de fissuras

em rodas ferroviárias em contato com trilhos para obter uma maior eficiência computacional e melhores resultados. A técnica também tem sido empregada na modelagem e estudo de diversas estruturas, tais como as pás de turbinas eólicas (para identificar zonas sujeitas a falhas, através de pequenos domínios da peça bem refinados [4]), em estruturas aeronáuticas [5], cerâmicas [6], entre outras. A técnica está disponível para ser usada em pacotes de diversos softwares comerciais amplamente conhecidos de elementos finitos, tais como o ANSYS® e o ABAQUS®. Neste trabalho a submodelagem será aplicada utilizando o software ANSYS® para analisar a distribuição de tensões locais em uma região de uma estrutura de barras simples e também no estudo das tensões de uma placa plana com fissura.

## **II. SUBMODELAGEM**

A submodelagem é uma técnica de elementos finitos utilizada para obter melhores resultados em uma certa região do domínio [7]. O seu conceito é definido através da limitação em um modelo local da região de interesse no qual as condições de contorno baseadas nos resultados do modelo global – analisado previamente – são transmitidas ao local, permitindo estudar com maior detalhe a região de interesse [6].

Os submodelos podem ser vistos como partes menores de um modelo completo em elementos finitos, denominados com frequência de modelos globais [4]. Os modelos globais podem não apresentar resultados aceitáveis em certas regiões de interesse, como em regiões de concentração de tensão. Para obter melhores resultados poderia ser refinada a malha de todo o modelo, porém, isso poderia tornar o problema custoso computacionalmente. Dessa forma a submodelagem permite criar um modelo menor apenas da região de interesse (com malha mais refinada) que é analisado de forma independente do modelo global [7].

A submodelagem é feita a partir de um modelo global, onde o campo de deslocamentos é obtido. O submodelo é então

criado como se fosse uma seção retirada (ou recortada) do modelo global, de modo que os deslocamentos calculados (na interface comum a ambos os modelos) são transmitidos do modelo global ao submodelo [4]. Os nós no contorno do submodelo não necessariamente precisam corresponder, em termos de posição, aos nós do modelo global, pois o campo de deslocamentos aplicado naqueles são extrapolados a partir das funções de forma dos elementos do modelo global [1].

O tamanho e o formato da geometria para criar o submodelo não são pré-estabelecidos, no entanto, são necessários cuidados com concentradores de tensão, pois a submodelagem pode afetar a zona de influência (pelo princípio de Saint Venant, que define que o efeito de concentradores de tensão são localizados nas suas proximidades [7]). Portanto, é necessário que o contorno do submodelo esteja suficientemente afastado de pontos concentradores de tensão para que o campo de tensões não seja drasticamente afetado pelos mesmos [1].

### III. ANÁLISE DE UMA ESTRUTURA SIMPLES DE BARRAS

Para aplicação da técnica de submodelagem, inicialmente foi idealizada uma estrutura simples com uma região de mudança da geometria, que é objeto do estudo. A estrutura é composta por uma barra horizontal conectada a uma barra vertical engastada. A ligação entre ambas foi considerada perfeitamente engastada. Foram aplicadas duas cargas, uma horizontal e outra vertical, de 7N e 5N respectivamente, em um único nó na extremidade da estrutura. As barras que a compõem têm comprimento de 1m, e seção transversal quadrada de 10 x 10 mm. A geometria desta estrutura está representada na Fig. 1. As características para o material foram adotadas como sendo as características gerais de um aço com módulo de elasticidade de 200 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,3. A análise foi realizada utilizando o software ANSYS®, considerando comportamento elástico-linear da estrutura.

A região de interesse para o submodelo da estrutura é o nó número 2 (conforme Fig. 1), onde se tem a ligação entre as duas barras, caracterizada por uma mudança brusca da geometria (uma quina e, portanto, presença de singularidade). Objetivando a análise e a influência da distribuição de tensões que essa mudança de geometria acarreta na região, foi elaborado um modelo em elementos finitos de toda a estrutura, denominado modelo global, onde foram analisadas as tensões na região específica do nó 2. Em seguida foi elaborado um submodelo apenas da região de interesse para obter resultados mais acurados para a distribuição de tensão nesse local. O modelo global e o submodelo em elementos finitos podem ser

identificados na figura 2. E por ser uma estrutura simples foram calculadas ainda as máximas tensões no nó de interesse de maneira analítica.

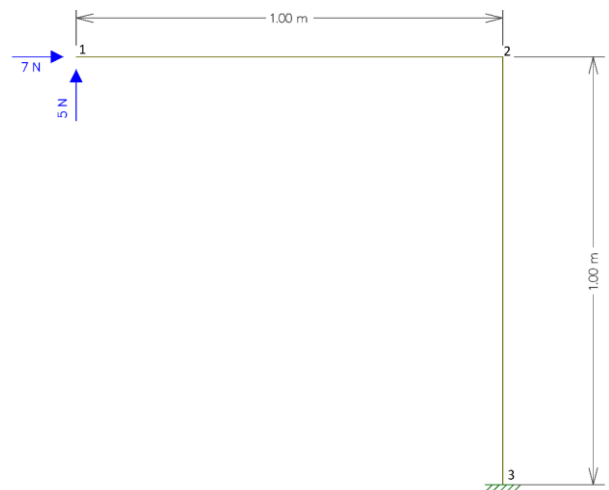


Fig. 1. Estrutura idealizada com os carregamentos e medidas indicadas.

Tanto o modelo global quanto o submodelo foram obtidos com elemento tipo sólido, sendo escolhido o elemento SOLID45, um elemento tridimensional com oito nós e três graus de liberdade (deslocamentos nas direções x, y e z) cada. Para o modelo global foi utilizada uma malha com elementos retangulares de 10 x 5 mm, totalizando 808 elementos finitos e 1827 nós. Para o submodelo foi utilizada uma malha mais refinada, com elementos quadrados de 1 mm de lado, totalizando 3000 elementos finitos e 3751 nós. Na Fig. 3 é apresentado um “zoom” da malha a) global, e b) local.

O modelo global tem como condições de contorno as forças aplicadas no nó 1, e a restrição em deslocamentos de engastamento no nó 3 (Fig.1). A força horizontal foi aplicada no software como uma pressão atuando na área da seção transversal do nó 1, e a força vertical foi aplicada como uma carga concentrada no nó inferior da malha da seção transversal, contido no plano de simetria vertical para não gerar esforço de torção na barra. Aplicado desse modo, o carregamento no modelo global equivale ao problema apresentado na Fig.1.

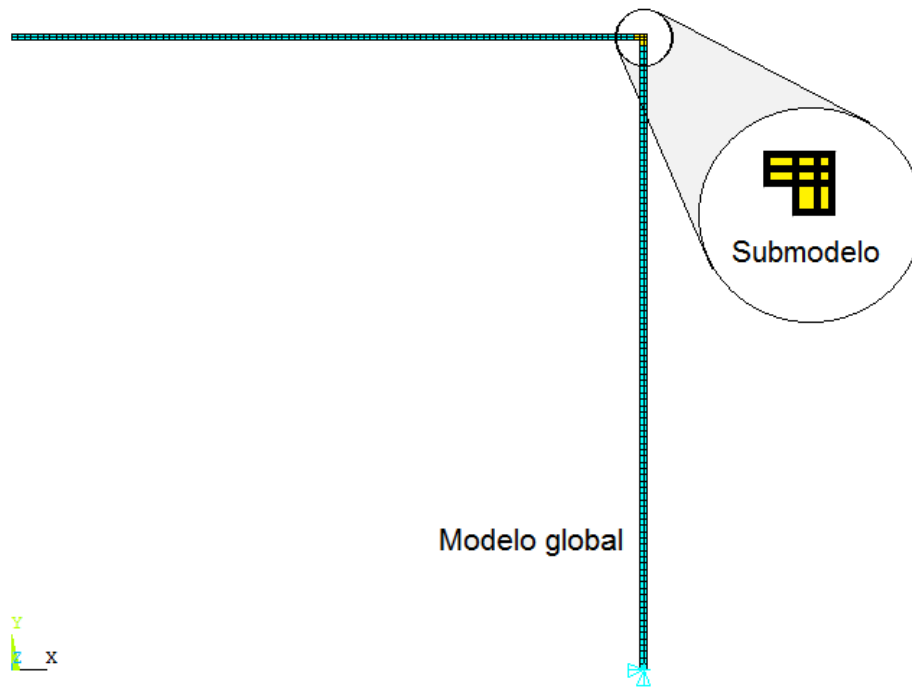


Fig. 2. Identificação da posição do submodelo em relação ao modelo global em elementos finitos.

O submodelo tem como condições de contorno os deslocamentos conhecidos nas suas extremidades, que são as regiões de interface entre o modelo global e o submodelo. Esses deslocamentos são obtidos a partir do modelo global para a posição dos nós do submodelo que estão nas regiões de interface, e caso não existam nós na mesma posição, os deslocamentos são obtidos por extrapolação, e são impostos (via comando */Input*) como condições de contorno para os mesmos no submodelo.

Para essa estrutura, pode-se também calcular analiticamente os deslocamentos e as tensões. Como as barras estão sujeitas à flexão composta foram determinadas apenas as tensões normais, máximas e mínimas, em cada barra.

As tensões normais nas barras podem ser determinadas segundo a Eq.(1) da resistência dos materiais para flexão composta [8]:

$$\sigma = (F/A) - (M \cdot y/I) \quad (1)$$

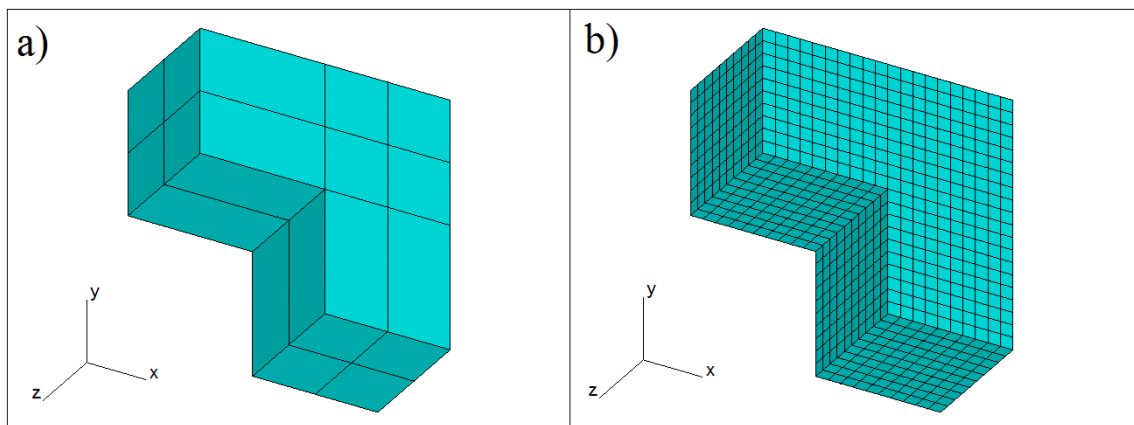


Fig. 3. Comparação das malhas do: a) modelo global e b) submodelo.

Onde  $F$  é a força normal atuando na seção transversal,  $M$  é o momento fletor,  $A$  é a área da seção transversal da barra,  $I$  seu momento de inércia centroidal, e  $y$  a distância da fibra que se está considerando até o eixo que passa pelo centroide da seção (considera-se que a variável  $y$  cresce na direção vertical para cima).

A equação anterior permite aferir os resultados encontrados no modelo e comparar com os obtidos no submodelo.

#### IV. ANÁLISE DE UMA ESTRUTURA DE CHAPA, SUJEITA A UM CONCENTRADOR DE TENSÕES FORTE

Nesse exemplo aplica-se a técnica da submodelagem em elementos finitos a um problema clássico da mecânica da fratura, que consiste em calcular o fator de intensidade de tensão,  $K_I$ , para uma placa plana com fissura central sujeita a uma tensão normal nos extremos (ou mais apropriadamente, chapa). O objetivo do presente exemplo é testar os resultados obtidos para  $K_I$  através do modelo em elementos finitos, e do respectivo submodelo, com relação aos resultados analíticos disponíveis na literatura, tomados como referência [9] e [10].

O problema consiste em uma chapa com largura de 20 cm e altura de 40 cm, com uma fissura central na direção da largura, com comprimento de 2 cm. A estrutura é carregada nas suas extremidades com uma tensão normal de 1000 kgf/cm<sup>2</sup>, atuando na direção perpendicular ao comprimento da fissura. Foram adotadas como características do material o módulo de elasticidade de  $2,1 \times 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup> e o coeficiente de Poisson no valor de 0,3. As características do problema em relação à geometria estão representadas na Fig. 4.

Considerando as características geométricas do problema e o carregamento aplicado é possível determinar analiticamente o fator de intensidade de tensão ( $K_I$ ) através da mecânica da fratura elástica linear pela Eq.(2).

$$K_I = Y \cdot \sigma \cdot (\pi \cdot a)^{1/2} \quad (2)$$

Na Eq.(2)  $a$  é a metade do comprimento da fissura,  $\sigma$  a tensão aplicada e  $Y$  é o fator geométrico, que considera a influência das características geométricas do problema no valor de  $K_I$ . Para o caso estudado de placa plana com fissura central, o fator geométrico pode ser obtido segundo [9] e [10], através da Eq.(3).

$$Y = [\sec(\pi \cdot a / W)]^{1/2} \quad (3)$$

Onde  $a$  é a metade do comprimento da fissura e  $W$  a largura da chapa. Foi elaborado um modelo em elementos finitos, assim como um submodelo, com o objetivo de obter o fator de intensidade de tensão. A análise foi realizada utilizando o software ANSYS®. Para obter o modelo global foi considerado apenas um quarto da geometria da chapa por conveniência, em função da simetria do problema, sendo aplicadas as condições de contorno necessárias para isso. Foi utilizado o elemento PLANE 42, um elemento bidimensional (considerando estado plano de tensões), com quatro nós e com dois graus de liberdade por nó (deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$ ). Para o modelo global a malha foi definida na região da ponta da fissura através do comando KSCON do software, que permite concentrar a malha no entorno desse ponto, sendo gastos ao todo 422 elementos e 427 nós. O submodelo foi elaborado contemplando apenas a região próxima à ponta da fissura, fazendo um refinamento da malha nessa região, sendo utilizados 15000 elementos e 15242 nós. A Fig. 5 mostra a posição do submodelo em relação ao modelo global, e a Fig. 6 compara a diferença das malhas do modelo global e do submodelo na região de interesse (a ponta da fissura).

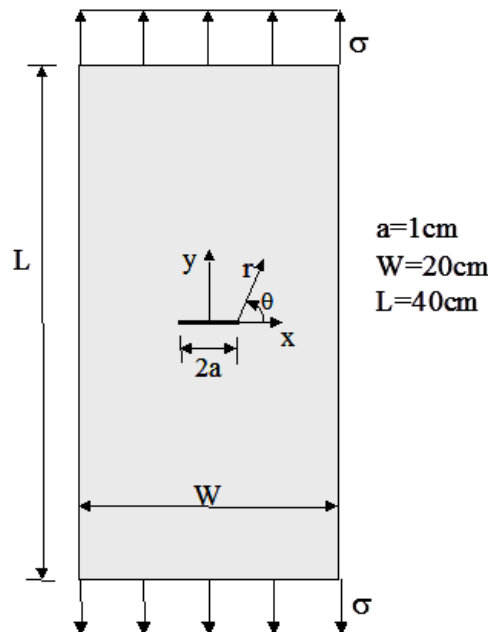


Fig. 4. Geometria e carregamento da chapa com fissura.

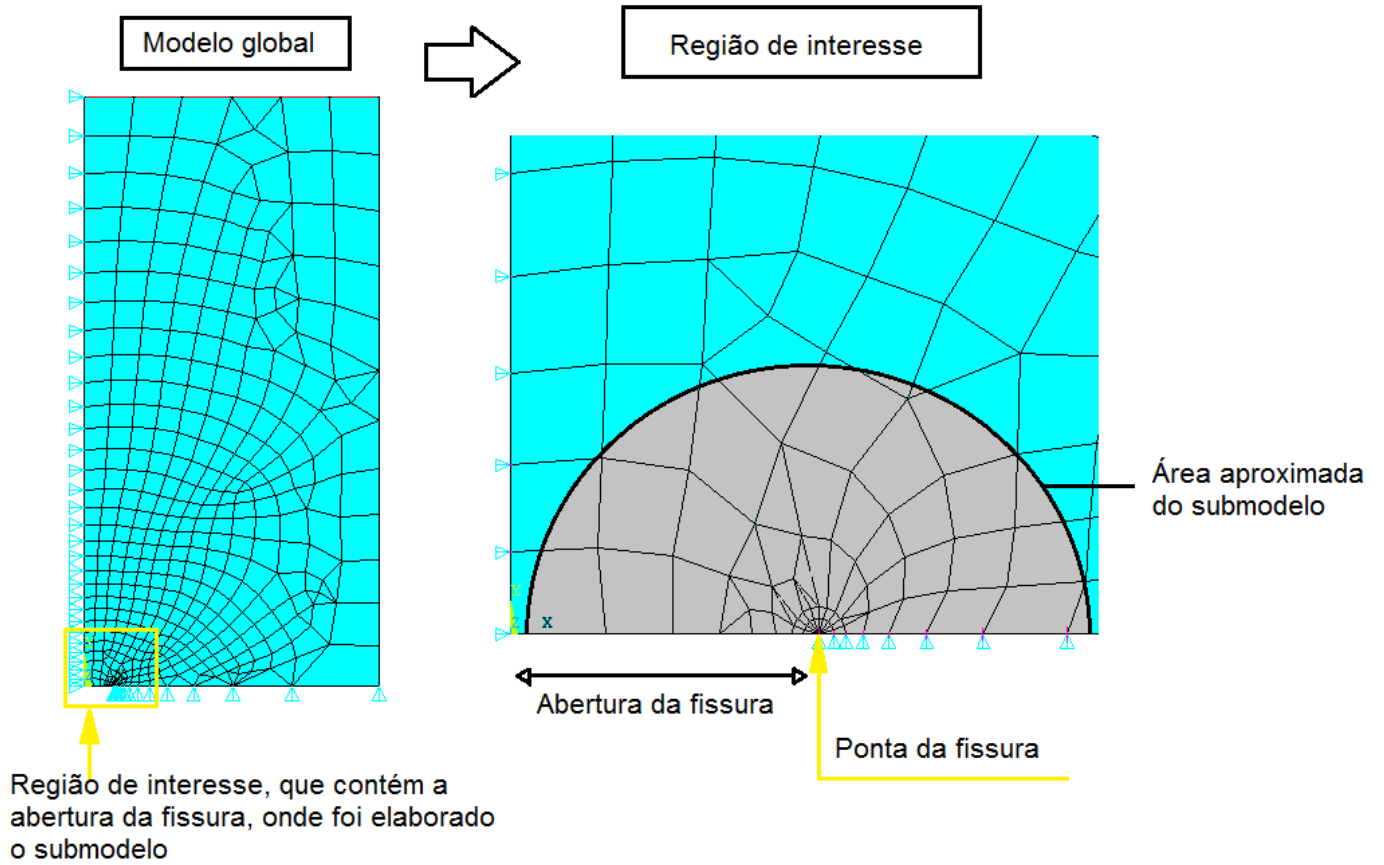


Fig. 5. Posição do submodelo em relação ao modelo global.

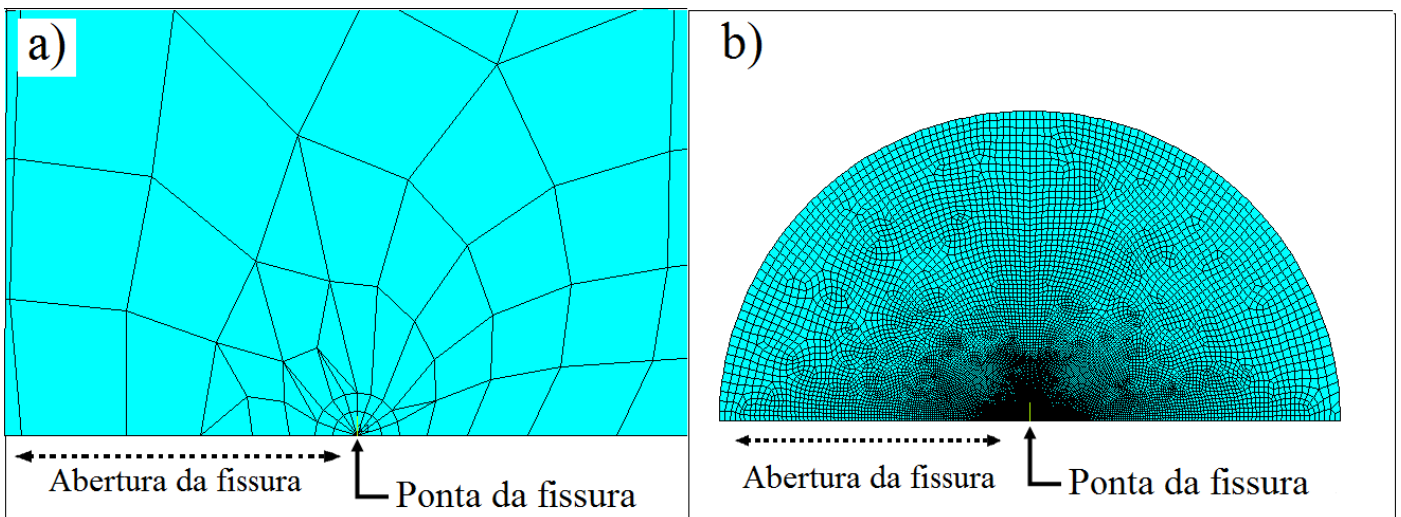


Fig. 6. Comparação das malhas do: a) modelo global, b) submodelo.

Os valores de  $K_I$  calculados pelo software foram obtidos (através do comando KCALC, para obtenção automática de

$K_I$ ), tendo como dado de entrada o nó da ponta da fissura e também dois nós ao longo da abertura da mesma (onde foram

escolhidos o nó mais afastado da ponta da fissura e o nó intermediário entre ambos).

### V. RESULTADOS

Primeiramente são apresentados os resultados obtidos na análise da estrutura de barras, descrita no item III. Para o modelo global foi analisada apenas a região de interesse (a região onde é feito o submodelo) representada na Fig. 2, a fim

de permitir a comparação entre ambos os modelos. Na Fig. 7 e 8 são apresentados os deslocamentos obtidos na direção x e y respectivamente, para o modelo global e o submodelo, para demonstrar a compatibilidade existente entre os modelos. Na Fig.9 são apresentadas as tensões obtidas na direção x ( $\sigma_x$ ), e na Fig. 10 são apresentadas as tensões na direção y ( $\sigma_y$ ).

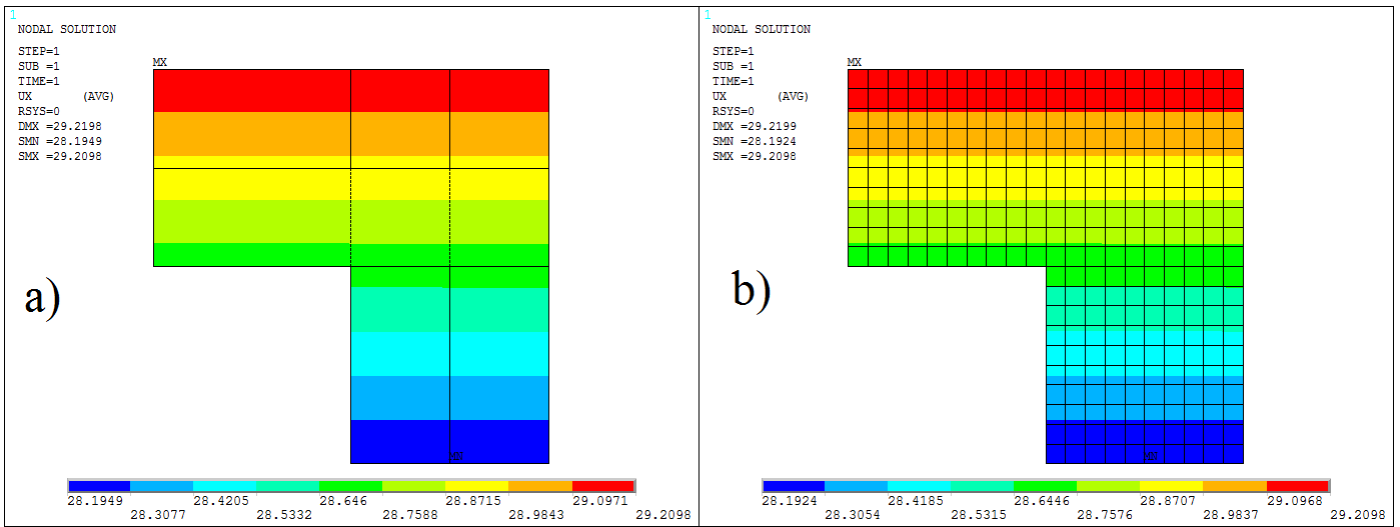


Fig. 7. Comparação dos deslocamentos na direção x no: a) modelo global e b) submodelo.

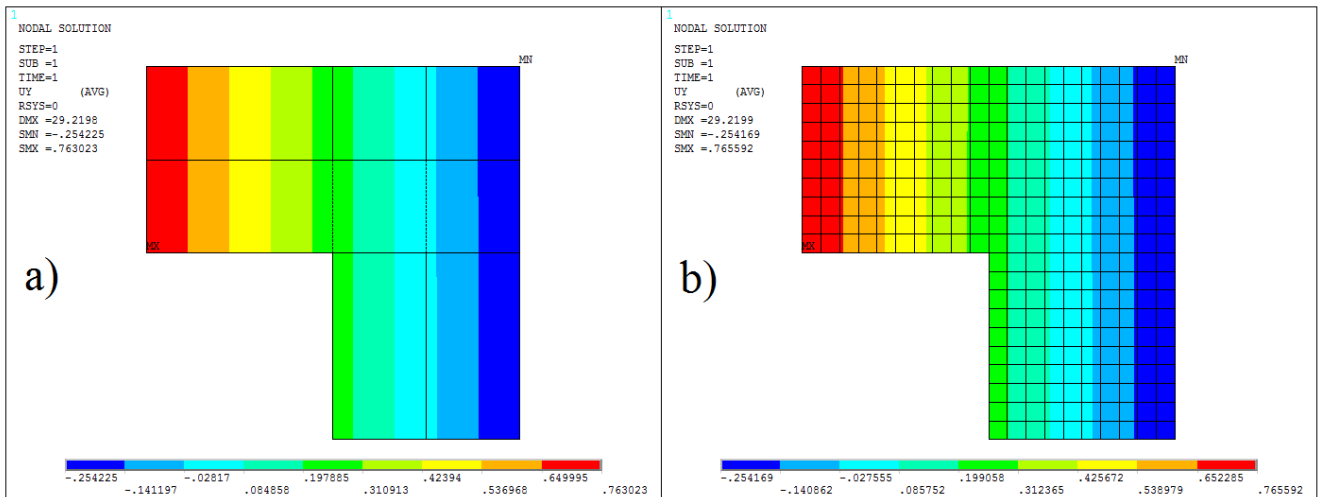


Fig. 8. Comparação dos deslocamentos na direção y no: a) modelo global e b) submodelo.

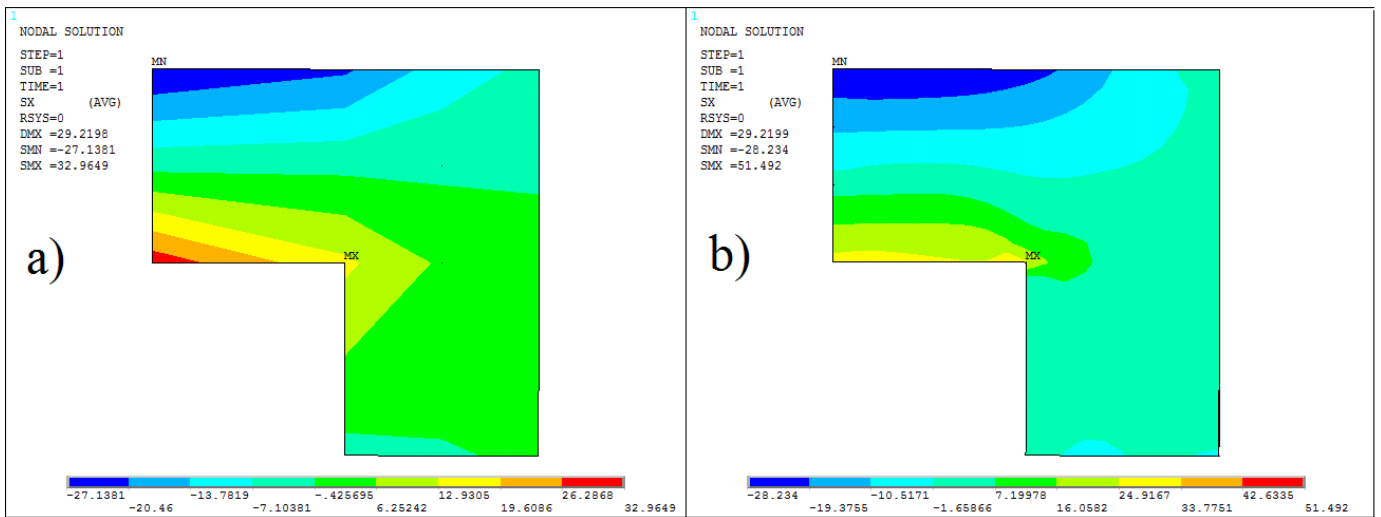


Fig. 9. Tensões ( $\sigma_x$ ) no: a) modelo global e b) submodelo.

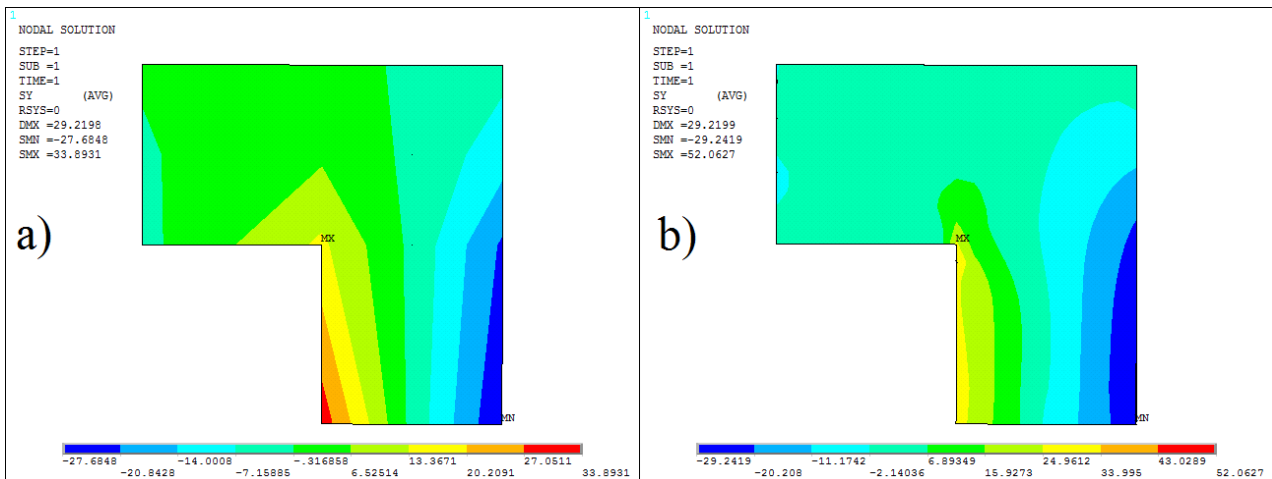


Fig. 10. Tensões ( $\sigma_y$ ) no: a) modelo global e b) submodelo.

Na Tabela I são comparados os resultados analíticos de tensões normais na direção x (obtidos a partir da Eq. (1)), para a região de interesse do estudo, em relação aos resultados obtidos através do modelo global e do submodelo em elementos finitos, observados no nó 2 (Fig. 1) da estrutura.

TABELA I. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS DE TENSÕES  $\sigma_x$  NO NÓ 2.

Tensões Normais na direção x	Tensões na direção x (MPa)		
	Resultado Analítico	Modelo Global	Submodelo
Máxima	29,93	32,96	51,49
Mínima	-30,05	-27,14	-28,24

Na tabela I anterior percebe-se que para as tensões máximas, o modelo global apresentou um erro de apenas 10,12% em comparação com o resultado analítico.

A seguir, na Tabela II são comparados os resultados analíticos de tensões normais na direção y (obtidos a partir da Eq. (1)), para a região de interesse do estudo, em relação aos resultados obtidos através do modelo global e do submodelo em elementos finitos.

TABELA II. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS DE TENSÕES  $\sigma_y$  NO NÓ 2.

Tensões Normais na direção y	Tensões na direção y (MPa)		
	Resultado Analítico	Modelo Global	Submodelo
Máxima	29,95	33,89	52,06
Mínima	-30,05	-27,68	-29,25

Ao comparar as tensões máximas na direção y, presente na tabela II, percebe-se que o erro do modelo global em relação ao resultado analítico foi de aproximadamente 13,15%.

Portanto, pode-se notar que ao analisar as tensões de tração, que são as tensões de interesse no estudo, que se tem um bom resultado para o modelo global em comparação ao resultado analítico. Por outro lado, observa-se que em ambos os casos, o submodelo foi capaz de identificar um maior nível de tensões na quina, que eram esperadas em função da presença da singularidade.

São apresentados ainda os resultados obtidos a partir do estudo da chapa com fissura, descrito no item IV. Na tabela III o valor do fator de intensidade de tensão ( $K_I$ ) calculado analiticamente a partir da literatura ([9] e [10]) é comparado aos valores obtidos através do modelo global e do submodelo em elementos finitos.

TABELA III. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS DE  $K_I$

Fator de intensidade de tensão $K_I$ (kgf.cm <sup>1/2</sup> )		
Resultado Analítico	Modelo Global	Submodelo
1783,47	1785,9	1608,8

Observa-se neste exemplo, que o modelo global foi suficientemente capaz de identificar o concentrador de tensões, e que, por outro lado, o submodelo não permitiu aproximar a resposta tão bem quanto o global.

## VI. CONCLUSÕES

Da análise da estrutura de barras foi possível perceber, através da comparação dos resultados entre o modelo global e o submodelo, que neste as tensões são distribuídas de maneira mais uniforme (uma vez que permitiu utilizar uma malha melhorada localmente). Além disso, o submodelo permitiu captar melhor o efeito resultante da mudança de geometria, apresentando tensões máximas maiores, superando os resultados analíticos e os valores obtidos no modelo global. Isso pode estar relacionado ao fato de que o método dos elementos finitos é um processo de cálculo numérico aproximado, portanto, ao refinar a malha no submodelo se obtém uma resposta mais precisa do problema.

Tomando como referência o cálculo analítico da estrutura, observa-se que o modelo global apresentou resultados mais próximos do que o submodelo, para tensões máximas (as que desencadeiam mecanismos de falha). Porém, no resultado analítico não foi considerado o efeito da singularidade causada pela mudança de geometria do problema e, desta forma, os resultados obtidos através do submodelo estariam mais próximos das tensões que efetivamente ocorrem na região estudada da estrutura. Ainda poderia ser analisada a diferença de que no cálculo analítico a estrutura foi considerada plana, e no modelo global e submodelo ela foi elaborada como uma estrutura tridimensional, e por isso o estado de tensões nos modelos em elementos finitos ficaram mais complexos.

Por outro lado, a utilização do submodelo no problema da chapa fissurada permitiu identificar que o submodelo não aumentou a precisão no cálculo de  $K_I$  em comparação com o modelo global (tomando como referência a resposta analítica). O modelo global apresentou um erro desprezível, enquanto que a resposta obtida pelo submodelo atingiu aproximadamente

90% da resposta esperada para  $K_I$ . Aparentemente, o modelo global – da forma em que foi apresentado – parece ser o mais indicado para análise do fator de intensidade de tensão para o problema estudado, o que pode estar relacionado com a malha empregada, que foi obtida através do comando “KSCON” - um comando específico para gerar malhas para o estudo de fissuras, utilizado apenas no modelo global.

Ainda poderiam ter sido testadas soluções mais adequadas para a obtenção de fatores de intensidade de tensão, como a utilização de elementos finitos especiais (*quarter-point* ou outros de ordem superior) localizados na ponta da fissura, o que provavelmente poderia aproximar a resposta ainda mais. Além disso, acredita-se que a região do “recorte” escolhida para a submodelagem pode ter tido sua resposta afetada pelo efeito da perturbação local do campo de tensões, devido à proximidade à ponta da fissura, e ainda poderia ser analisado se a malha empregada é adequada para o problema.

Este trabalho permitiu identificar estados críticos de tensão aplicados a problemas com potencial à falha, e para futuramente empregar submodelos em problemas mais complexos. Assim, dando sequência a esta pesquisa, pretende-se aplicar submodelos em estruturas de pontes ferroviárias metálicas, com a inclusão de modelos de fadiga, onde é preciso conhecer o estado crítico local mais propenso à falha na estrutura.

## AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer à CAPES pelo apoio financeiro concedido (bolsa de mestrado).

## REFERÊNCIAS

- [1] C.Albuquerque, P.M.S.T. de Castro, R. Calçada, Efficient crack analysis of dynamically loaded structures using a modal superposition of stress intensity factors, “Engineering fracture mechanics”, vol 93, pp.75-91, 2012.
- [2] Y. Liu, L. Liu, S. Mahadevan, Analysis of subsurface crack propagation under rolling contact loading in railroad wheels using FEM, “Engineering fracture mechanics”, vol 74, pp. 2659-2674, 2007.
- [3] O. R. Shah, M. Tarfaoui, The identification of structurally sensitive zones subject to failure in a wind turbine blade using nodal displacement based finite element sub-modeling, “Renewable energy”, vol 87, pp 168-181, 2016.
- [4] I. Smojver, D. Ivancevic, Numerical simulation of bird strike damage prediction in airplane flap structure, “Composite structures”, vol 92, pp. 2016-2026, 2010.
- [5] H. Liu, C. Lin, M. Sun, Y. Chang, Numerical investigation of macro-and micro-mechanics of a ceramic veneer bonded with various cement thicknesses using the typical and submodeling finite element approaches, “Journal of dentistry”, vol 37, pp. 141-148, 2009.
- [6] Y. Liu, B. Stratman, S. Mahadevan, Fatigue crack initiation life prediction of railroad wheels, “International journal of fatigue”, vol 28, pp. 747-756, 2006.
- [7] Ansys, Advanced Analysis Guide, release 15.0, ANSYS, Inc., 2013.
- [8] F.P.Beer, E.R Johnston Jr., Resistência dos Materiais, 3ª Ed.. Pearson Makron Books: São Paulo, 1995, pp. 398-400.
- [9] D. BROEK, Elementary engineering fracture mechanics, 3ª Ed. The Hague: Martinus Nijhoff Publishers, 1982, pp. 76.
- [10] M. MEYERS, K. CHAWLA, Mechanical Behavior of Materials, 2 ed. Cambridge University Press, 2009, pp.426.