

Uma Análise de Escoamento Incompressível Cilindro-Canal 2-D Usando o Método DG

Aureo Quintas Garcia
Departamento de Matemática
UTFPR
Pato Branco, Paraná
Telefone: (46) 3220-2553
Email: aureo@utfpr.edu.br

Francisco Augusto Aparecido Gomes
Departamento de Engenharia Mecânica
UTFPR
Pato Branco, Paraná
Telefone: (46) 3220-2580
Email: frnaciscogomes@utfpr.edu.br

Mildred Balin Hecke
Programa de Pós-Graduação em Métodos
Numéricos em Engenharia
UFPR
Curitiba, Paraná
Telefone: (41) 3361-3218
Email: mildredhecke@gmail.com

Resumo—Neste trabalho é apresentado a aplicação do método descontínuo Galerkin (DG) a um escoamento bidimensional, incompressível clássico. No presente trabalho, devido o número de Reynolds ($Re \geq 100$) praticado, se trata de um escoamento transiente de um fluido newtoniano em torno de um cilindro posicionado no interior de um canal retangular. A formulação DG está equipada com um tratamento da fronteira de saída (“outflow boundary”) recentemente apresentado à comunidade de Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC). Os trabalhos publicados e que apresentaram esta condição, mostraram sua performance nos contextos de Elementos Finitos Clássicos e de Elementos Espectrais. Neste artigo é feito um trabalho clássico onde medições precisas dos coeficientes de arrasto, C_d , de sustentação, C_l e o número de Strouhal, St , foram obtidas, no contexto do método DG e com o uso deste tratamento da fronteira de saída. Conclui-se o trabalho mostrando a boa performance do método DG adicionado desta nova técnica de fronteira.

Palavras-chave—Equações de Navier-Stokes Incompressíveis; Método Galerkin Descontínuo; Condições de Fronteira de Saída; Método de Alta Ordem

I. INTRODUÇÃO

O método Galerkin descontínuo (DG) é uma ferramenta de análise numérica, em engenharia, muito versátil para lidar com problemas de dinâmica dos fluidos. Isto se deve a sua alta capacidade de trabalhar em geometrias complexas e a relativa facilidade de adaptação p e/ou h ([2]). Este pode ser considerado como um superconjunto que contém os métodos de elementos finitos (MEF) e de volumes finitos (MVF), portanto pode ser usado em escoamentos convectivos-dominantes e, ao mesmo tempo, é bem desenhado para adaptatividade de malhas e aproximações locais de alta ordem. Para maiores detalhes e um aprofundamento na teoria consulte [2], [10] e [5]. Não obstante estas boas características, o método DG está sujeito aos mesmos inconvenientes que seus companheiros, MEF e MVF, no que diz respeito à modelagem numérica das condições de contorno de saída (“outflow boundary conditions”). Objetivamente, quase sempre o domínio computacional precisa ser tomado maior do que a realidade física do problema demanda, para problemas convectivo-dominantes ([3]). Embora existam várias técnicas para lidar com esta questão ([8]), este ainda é um problema em aberto.

A situação ideal seria uma na qual as propriedades observadas pudessem ser escoadas ao longo do campo fluido e deixasse o domínio computacional sem causar nenhum efeito não-físico à montante da fronteira de saída. Recentemente Dong et al [3] e Braack et al [1] propõem métodos similares para calcular as variáveis do escoamento, em fronteiras de saída, de tal modo que se pode tornar o domínio computacional drasticamente reduzido, sem que se perca precisão e qualidade na modelagem do escoamento, de forma apreciável. Estes autores foram bem sucedidos em suas propostas e estas foram erigidas em contextos de Método Espectral e Método dos Elementos Finitos Clássico, respectivamente. A partir destes resultados, surge naturalmente a ideia de verificar o respectivo comportamento do método DG munido com esta nova metodologia de tratamento da condição de fronteira de saída.

O artigo possui o seguinte escopo: Na seção 2 é apresentado os detalhes construtivos do experimento numérico. O experimento envolve o escoamento laminar bi-dimnesional em torno de um cilindro circular, imerso em um canal retangular. Reproduz-se aqui um resultado em particular, referente a um dos experimentos abordados no artigo de Schäfer and Turek ([9]). São calculados os coeficientes de arrasto, C_d e de sustentação, C_l e o número de Strouhal, St . É feita a comparação com os dados em [9]. Na seção 3 é apresentado um resumo da inserção (proposta neste trabalho) do algoritmo apresentado por [3], no código DG usado. Isto é feito, basicamente, em forma de fluxograma. Na seção 4 escoamentos em domínios severamente truncados e em domínios não severamente truncados são analisados usando-se gráficos de curvas de nível e os cálculos de C_d , C_l e St . Finalmente, observações conclusivas são feitas na seção 5.

II. ESCOAMENTO CILINDRO-CANAL

Nesta seção é apresentado os detalhes para a solução numérica, pelo método DG, das equações de Navier-Stokes para o clássico problema-tese cilindro-canal.

Para este teste considera-se um escoamento transiente de um fluido newtoniano, incompressível e bidimensional. Usa-se como tese de validação o experimento numérico realizado por Schäfer e Turek [9]. Em seu artigo, dentre outros resultados

e baseando-se em vários experimentos numéricos criteriosamente conduzidos por diferentes colaboradores, Schäfer e Turek extraíram intervalos de amplitudes mínimas otimizadas, que representam faixas de valores máximos encontrados para os parâmetros C_d , C_l e St . Neste sentido, o valor à esquerda de um C_d -intervalo representa o menor valor máximo encontrado para o parâmetro C_d , enquanto que o valor à direita deste intervalo representa o maior valor máximo encontrado. O mesmo procedimento se aplica para a obtenção dos intervalos de valores máximos para C_l e St . A Fig. 1 mostra a geometria do experimento, onde $D = 0.1m$, $H = 0.41m$ e as condições de contorno homogêneas. À fronteira de entrada é usada a condição

$$u(0, y, t) = \frac{4U_m y(H - y)}{H^2}, \quad v(0, y, t) = 0, \quad (1)$$

onde $U_m = 1.5m/s$. Definindo-se o número de Reynolds por $\frac{\bar{U}D}{\nu}$, com $\bar{U}(t) = \frac{2}{3}u(0, \frac{H}{2}, t)$, obtém-se $Re = 100$ para este caso. Para este valor de Re um regime não-estacionário é garantido. A condição de fronteira de saída usada é aquela obtida em [3]. Para iniciar a simulação é escolhida a condição inicial homogênea para todos os campos; a não ser o campo de velocidade horizontal sobre a fronteira de entrada, onde está aplicado o perfil de entrada $u(0, y, t)$.

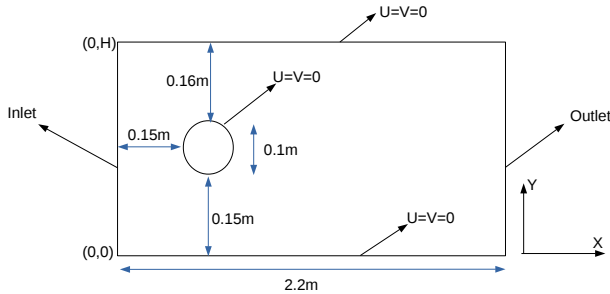


Figura 1. Experimento cilindro-canal. (Reprodução livre baseada em [9].)

III. CONDIÇÃO DE FRONTEIRA DE SAÍDA

Neste trabalho a nova condição de contorno (CC) de saída, de Dong et al, foi inserida em um código DG para mostrar a efetividade do método DG, equipado desta CC, na solução numérica de escoamentos com domínios computacionais fortemente truncados. Em [3] foi apresentado, além das CC de Dirichlet e Neumann para pressão e velocidade, respectivamente, na fronteira de saída, o algoritmo correspondente a ser inserido em um resolvidor (“solver”) para as equações de Navier-Stokes incompressível. O artigo também fornece detalhes sobre o algoritmo e as idéias em que o mesmo se baseia; portanto não nos estenderemos nestes pontos aqui. Em [1] pode-se encontrar um ponto de vista mais teórico do

porque este projeto de CC de fato é eficaz. Aqui, todavia, é apresentada apenas as fórmulas respectivas para os campos de pressão e da velocidade, envolvidas nesta nova CC e como elas são inseridas em um código DG.

Assume-se que Ω é um domínio limitado, aberto e bi-dimensional, $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_o$ uma união disjunta onde $\partial\Omega_D$ representa a fronteira onde a velocidade \mathbf{u} é prescrita e $\partial\Omega_o$ representa a fronteira complementar onde nem \mathbf{u} nem p são conhecidas. A equação de Navier-Stokes pode ser escrita como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad \text{em } \Omega, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{em } \Omega, \quad (3)$$

onde \mathbf{x} é o vetor posição, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ é a velocidade, $p(\mathbf{x}, t)$ é o campo de pressão, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ é um campo de força externo, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ é a viscosidade cinemática e t é o tempo.

Dong et al propuseram as seguintes CC sobre $\partial\Omega_o$

$$\nu \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} - p \mathbf{n} = \mathbf{f}_b(\mathbf{x}, t) + \left[\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 S_o(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \right] \mathbf{n}, \quad \text{sobre } \partial\Omega_o, \quad (4)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário exterior. Observe-se que igualando 4 a zero, obtém-se a CC “do-nothing” clássica (CDN) [1]. De importância destacada nesta proposta é o termo $S_o(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$

$$S_o(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}}{U_o \delta} \right). \quad (5)$$

Observe-se em 5 a dependência de S_o em relação as direções relativas dos vetores \mathbf{n} e \mathbf{u} , ambos calculados sobre $\partial\Omega_o$. Esta dependência levou alguns autores a chamar esta CC de “Directional do-Nothing Boundary Condition” (DDN) [1]. De forma simplificada, este termo somente irá atuar quando $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} < 0$, que corresponde ao influxo do escoamento em $\partial\Omega_o$. Isto é um controle para o aumento da energia dentro do domínio computacional, a falta do qual leva à instabilidade numérica.

Denote-se por \mathbf{u}^n e p^n a velocidade e a pressão sobre a fronteira de saída, no passo de tempo n . Dong et al atacaram o problema de resolver numericamente o sistema de equações (2)-(3), juntamente com suas condições iniciais e de fronteira (estabelecidas na seção II), por meio de uma estratégia que desacopla os cálculos da velocidade e da pressão. Baseando-se nesta estratégia e no fato de que o código DG usado também desacopla estes campos, escolhe-se a seguinte expressão para a condição de Dirichlet para a pressão, no passo de tempo $(n + 1)$

$$p^{n+1} = \nu \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 S_o(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n+1}) - \mathbf{f}_b^{n+1} \cdot \mathbf{n}, \quad \text{sobre } \partial\Omega_o, \quad (6)$$

enquanto a atualização das taxas de variação das componentes da velocidade (uma CC de Neumann) é obtida pela seguinte equação

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{\nu} [p^{n+1} \mathbf{n} - \frac{1}{2} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 S_o(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n+1}) \mathbf{n} - \nu(\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}) \mathbf{n} + \mathbf{f}_b^{n+1}], \quad \text{sobre } \partial\Omega_o. \quad (7)$$

Quando o problema possui solução exata o termo \mathbf{f}_b é usado e este é obtido simplesmente pela substituição dos valores exatos de \mathbf{u} e p em (6) e (7). Assim este termo provê exatidão nos cálculos nas fronteiras de saída [3]; mas em geral soluções exatas não são conhecidas e nestes casos \mathbf{f}_b é igualado ao vetor zero.

Se bem que estas expressões em (6)-(7) são quase idênticas às encontradas em [3], onde a única diferença aparente se resume à uma questão notacional, o modo como estas foram adicionadas ao código DG usado, neste artigo, não é o mesmo que se encontra em [3]. Objetivando fornecer uma indicação do procedimento usado neste trabalho, apresentase, na próxima seção, um resumo dos três passos principais que compõem o código DG usado e a visão em diagramas de blocos relacionada.

IV. ESTRUTURA DO CÓDIGO DG

O código DG usado está sendo construído tendo-se por base o código para o método Galerkin descontínuo denominado NUDG, de autoria de J.S. Hestheven e T. Warburton, disponível livremente no sítio: <https://github.com/tcew/nodal-dg/tree/master/Codes1.1> [6]. E uma CC de saída eficiente para escoamentos incompressíveis, como a que se está tratando aqui, se constitui em uma das partes que foi adicionada ao código NUDG original, afim de ampliar sua faixa de aplicabilidade. Com uma tal procedência, este código DG herda as seguintes características no que diz respeito a um *solver* para a solução numérica das equações de Navier-Stokes incompressíveis:

- 1) Esquema de particionamento temporal: Método de passo no tempo rigidamente estável [7]. Neste esquema de marcha no tempo cada passo é particionado em três subpassos.
 - (1.a) Subpasso de advecção.
 - (1.b) Projeção da pressão.
 - (1.c) Atualização viscosa.

No primeiro subpasso um lei de conservação simples é resolvida, de forma explícita, para uma velocidade intermediária $\tilde{\mathbf{u}}$ usando-se um esquema Adams-Bashforth de segunda ordem. A seguir, no segundo subpasso, uma segunda velocidade intermediária $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}$, que obedece a condição de divergência nula, é calculada através da solução de um problema de Poisson para a pressão, o qual é fechado com CC de Neumann apropriadas [7]. Isto também atualiza o campo de pressão. Por último, uma equação elíptica que relaciona $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}$ e o termo viscoso da equação Navier-Stokes, na verdade uma equação de Helmholtz, é resolvida e isto atualiza o campo de velocidade.

- 2) Discretização espacial: As derivadas espaciais para o termo não linear em (1.a) são tratadas usando-se a técnica “DG upwind” ([5]). Para os termos em (1.b)

e em (1.c) a discretização espacial é conseguida pelo uso da formulação de penalização interna simétrica do método DG (SIPDG) [5].

- 3) *Solver* do sistema linear: É usada uma abordagem direta que consiste, em primeiro lugar, de uma permutação especial das linhas e colunas das matrizes dos sistemas, para a velocidade e para a pressão, que reduz a esparsidade e isto é conseguido usando-se o *sistema de numeração reverso de Cuthill-McKee* [4]. Em segundo lugar, tomando-se vantagem da simetria dos sistemas e suas positividade ([5]), obtém-se as soluções via a fatoração de Cholesky. A aplicação conjunta destas estratégias reduzem significativamente as exigências de memória.

A Fig. é uma visão esquemática do algoritmo usado neste trabalho, onde se destaca a inclusão da CC DDN.

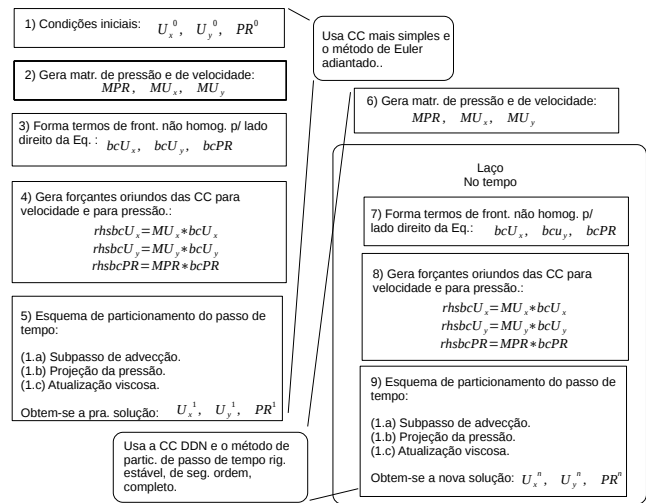


Figura 2. Fluxograma para o *solver* DG.

Neste algoritmo, através dos passos 1 até o 5 obtém-se a primeira solução \mathbf{u}^1 e p^1 . Devido o fato de que o método de passo no tempo usado não é auto-iniciante, o primeiro passo se constitui em um método de Euler adiantado o que faz com que as matrizes da pressão e da velocidade sejam diferentes das correspondentes calculadas no passo 6. Estas são usadas a partir do passo 7 onde são usados os coeficientes corretos do método de particionamento do passo de tempo rigidamente estável. No passo 7 os termos de fronteira não-homogêneos são calculados usando-se a CC DDN na fronteira de saída. Dentro do laço de tempo, esta CC é atualizada a cada passo de tempo na medida em que suas fórmulas recebem as correspondentes atualizações da velocidade, \mathbf{u}^n , referidas em 6 e 7. Esta estrutura algorítmica de inserção da CC DDN é uma alternativa distinta e de relativamente rápida implementação para o uso desta CC em uma implementação computacional do método DG.

V. COEFICIENTES DE ARRASTO, SUSTENTAÇÃO E O NÚMERO DE STROUHAL

Nesta seção reproduz-se, via o método DG e as CC DDN, os resultados encontrados em [9] cujos detalhes do experimento estão na seção 2. Aqui também são gerados gráficos de curvas de nível que deixam claro a imperceptível influência exercida pela variação do tamanho do domínio computacional, que a combinação destas duas técnicas numéricas traz ao resultado final, mesmo quando de uma drástica redução no tamanho do domínio computacional.

As Figuras 4 e 6 mostram as curvas de nível para as componentes x da velocidade, U_x , para o domínio cortado pela metade e para o domínio integral original, respectivamente. Observe-se que não se pode perceber qualquer diferença entre os dois conjuntos de curvas de nível para $0 \leq x \leq 1.0$. Nas Figuras 3 e 5 são exibidos os respectivos domínios discretizados.

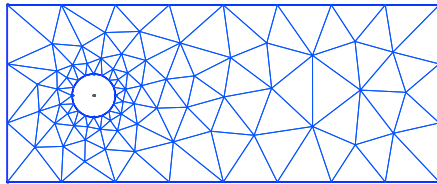


Figura 3. Discretização do domínio truncado (pela metade). 152 elementos, $x_{max} = 1.0$.

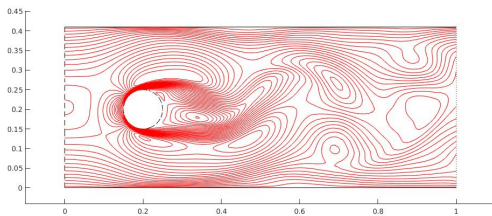


Figura 4. Curvas de nível de U_x para o domínio truncado (pela metade), em $x_{max} = 1.0$.

No que se segue, em complemento à informação gráfica, são apresentados os valores máximos calculados para os coeficientes: arrasto, Cd_{max} , sustentação, Cl_{max} e o número de Strouhal St , para uma sequência de experimentos, Tab.I. Nestes experimentos, além da variação do tamanho do domínio computacional e por motivo de completude nos testes, são

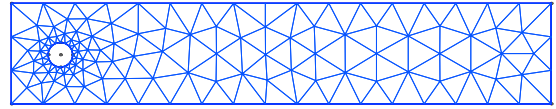


Figura 5. Discretização do domínio longo (inteiro). 218 elementos, $x_{max} = 2.2$.

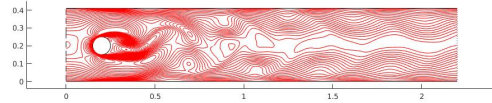


Figura 6. Curvas de nível de U_x para o domínio longo (inteiro).

incluídos também, como dados, as seguintes variáveis de teste: grau de interpolação polinomial elementar, N , número de elementos, tempo final do laço de tempo do *solver* (veja-se Fig. 2) e o uso, ou não, de fronteira de alta ordem para a superfície do cilindro ([5]).

De acordo com a Tab. I os resultados concordam bem com os de [9] (linha 3 da Tab. II). Para $x_{max} = 2.2$ nosso melhor resultado (linha 7 da Tab.I - (*)) está completamente dentro dos limites estabelecidos em [9] e não há erro comparativo. Para $x_{max} = 1.0$ nosso melhor resultado foi obtido com $N = 7$, 152 elementos, tempo final igual a 8 ou 12 e com o uso de fronteira de alta ordem. Observe também que os desvios para fora dos intervalos de confiança estabelecidos em [9] (linha 3 da Tab. II), reagem sobre apenas um dos parâmetros computados, Cd_{max} ou Cl_{max} e estes desvios ocorrem somente na terceira casa decimal do valor calculado de Cl_{max} . (Tab. I, linhas 3 e 4). Por fim a ausência de uma fronteira de alta ordem para a superfície do cilindro é sentida pela subavaliação de Cd_{max} , enquanto ainda se tem os valores de Cl_{max} e St dentro da faixa de confiança estabelecida em [9].

A Figura 7 apresenta o gráfico do coeficiente de sustentação e o gráfico da transformada rápida de Fourier, usada para se obter a frequência principal do coeficiente de arrasto.

N	Nel	x_{max}	T_f	Fronteira de alta ordem	Cd_{max}	Cl_{max}	St
6	152	1.0	12	sim	3.2492	0.9914	0.3000
6	218	2.2	8	sim	3.2493	0.9765	0.3000
7	152	1.0	8	sim	3.2324	1.0154	0.3000
7	152	1.0	12	sim	3.2324	1.0154	0.3000
7	208	1.0	8	sim	3.2288	1.0260	0.3000
7	208	1.0	12	sim	3.2288	1.0260	0.3000
7*	218	2.2	8	sim	3.2350	1.0074	0.3000
8	152	1.0	8	sim	3.2222	1.0257	0.3000
8	152	1.0	12	sim	3.2222	1.0258	0.3000
8	218	2.2	8	sim	3.2211	1.0196	0.3000
9**	152	1.0	8	não	3.1791	1.0025	0.3000
9	152	1.0	8	sim	3.2254	1.0260	0.3000
10	218	2.2	8	sim	3.2265	1.0207	0.3000

Tabela I

N : ORDEM DE INTERPOLAÇÃO ELEMENTAR; Nel : NÚMERO TOTAL DE ELEMENTOS; T_f : TEMPO FINAL. (*) NOSSO MELHOR RESULTADO PARA $x_{max} = 2.2$. (**) RESULTADO SEM FRONTEIRA DE ALTA ORDEM.

Métodos Comparados	Maiores Máximos			Menores Máximos		
	Cl	Cd	St	Cl	Cd	St
Shäfer & Turek	1.0100	3.2400	0.3050	0.9900	3.2200	0.2950
DG - presente trabalho	Cl=1.0074		Cd=3.2350	St=0.3000		

Tabela II

COMPARAÇÃO ENTRE OS INTERVALOS DE VALORES MÁXIMOS, DE [9], E OS VALORES MÁXIMOS NUMÉRICOS OBTIDOS PELO MÉTODO DG NO PRESENTE TRABALHO.

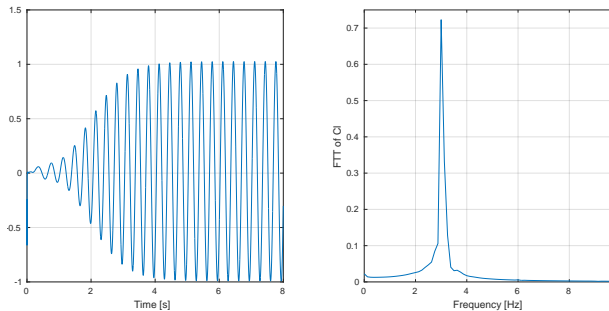


Figura 7. Coeficiente de sustentação C_l . 152 elementos, $x_{max} = 1.0$

VI. OBSERVAÇÕES CONCLUSIVAS

Neste trabalho incorporou-se uma proposta recente de técnica para modelar as CC de saída, desenvolvida em [3] e em [1], no método Galerkin descontínuo, objetivando uma análise de performance. Os resultados demonstraram que esta incorporação de fato foi exitosa na medida em que as simulações de

escoamentos em domínios severamente truncados produziram resultados bastante aproximados daqueles produzidos quando se utiliza a proposta clássica de domínios superdimensionados (longos). Tão importante que é para o método DG, esta capacidade de truncamento do domínio economiza memória e tempo de processamento.

Os resultados do presente experimento mostram dois pontos que revelam a boa performance do método DG equipado com a CC DDN. Em primeiro lugar, para o caso de domínios longos, os valores calculados usando a proposta deste trabalho caem inteiramente dentro dos intervalos estabelecidos em [9]. Em segundo lugar, para domínios severamente truncados, os cálculos mostram que apenas um parâmetro cai fora do intervalo de confiança. Todavia fora que possa estar, ainda assim este valor está próximo daqueles em tal intervalo.

Finalmente, o termo $S_o(\mathbf{n}, \mathbf{u})$, como estabelecido em [3] ou em [1], se constitui em um campo aberto de investigação visando melhoras, inclusive da performance associada ao método DG. Na mesma linha de pensamento, as referências citadas mostram que enquanto o primeiro autor usa uma função contínua, para modelar $S_o(\mathbf{n}, \mathbf{u})$, que no limite, quando $\delta \mapsto 0$, se aproxima de uma função degrau, o segundo autor usa uma função descontínua que é estabelecida por uma sentença que usa a estrutura condicional lógica “if”, isto é, “if $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$ then $S_o = 0$, else $S_o = 1$ ”. A performance realtiva de ambas abordagens ainda necessita de um teste comparativo conclusivo.

REFERÊNCIAS

- [1] M. Braack and P. Mucha. Directional do-nothing condition for the navier-stokes equations. *Journal of Computational Mathematics*, 32(5):507–521, 2014.
- [2] B. Cockburn. Discontinuous galerkin methods. In *School of Mathematics*. University of Minnesota, 2003.
- [3] S. Dong, G. E. Karniadakis, and C. Chrysosostomidis. A robust and accurate outflow boundary condition for incompressible flow simulations on severely-truncated unbounded domains. *J. Comput. Phys.*, 261:83–105, Mar. 2014.
- [4] A. George and J. W. Liu. *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite*. Prentice Hall Professional Technical Reference, 1981.
- [5] J. Hesthaven and T. Warburton. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods - Algorithms, Analysis and Applications*. Springer, 2008.
- [6] J. Hesthaven and T. Warburton. Nodal dg codes 1.1. <https://github.com/tcew/nodal-dg/tree/master/Codes1.1>, December 2014. Accessed: June 30, 2016.
- [7] G. E. Karniadakis, S. A. Orszag, and M. Israeli. High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 97:414–443, Dec. 1991.
- [8] R. L. Sani and P. M. Gresho. Résumé and remarks on the open boundary condition minisymposium. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18(10):983–1008, 1994.
- [9] M. Schäfer and S. Turek. The benchmark problem flow around cylinder. In H. EH, editor, *Flow Simulation with High-Performance Computers II - Notes on Numerical Fluid Mechanics*, volume 52, pages 547–566, 1996.
- [10] K. Shahbazi. *A Parallel High-Order Discontinuous Galerkin Solver for the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations in Complex Geometries*. PhD thesis, University of Toronto, 2007.