Métodos de ponto fixo aplicados ao polinômio interpolador através de polinômios de Chebyshev

Lucas Manoel Cunha dos Santos
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Curitiba-PR, Brasil
lucassantos.2015@alunos.utfpr.edu.br

Rodrigo Garcia Eustáquio
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Curitiba-PR, Brasil
eustaquio@utfpr.edu.br

***Resumo*—O objetivo deste trabalho é analisar o comportamento de alguns métodos de ponto fixo aplicados ao polinômio interpolador de uma função real obtido através dos polinômios de Chebyshev. Esses polinômios permitem que uma função e suas derivadas possam ser aproximadas em todo o domínio de uma maneira recursiva, permitindo melhor estabilidade numérica comparada com Lagrange ou diferenças divididas.**

***Palavras-chave*—polinômios de Chebyshev, polinômio interpolador, zeros de funções reais.**

I. Introdução

Através da história pôde-se afirmar que a matemática nos possibilita descrever e modelar na forma de equações, fenômenos cotidianos que nos cercam, como o movimento descrito por corpos na física, oscilações do mercado na economia e controles populacionais em ciências biológicas. Um interesse comum destes estudos é determinar os zeros de suas formulações.

Alguns métodos numéricos que objetivam determinar pelo menos um zero de uma função f utilizam polinômios como aproximações para esta função. Alguns deles utilizam polinômios específicos para aproximar localmente uma função, tais como o método de Newton, onde o iterado é o zero do polinômio de Taylor de primeira ordem em torno do iterado anterior. No entanto, outros polinômios podem ser considerados para aproximar globalmente a função tais como o polinômio interpolador. Nesse sentido os polinômios de Chebyshev são mais atraentes que os polinômios de Lagrange, por exemplo, por possuírem propriedades interessantes, tais como construí-los recursivamente da forma

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \tag{1}$$

Além disso, eles podem também ser utilizados para reduzir o grau de um polinômio interpolador com uma perda mínima de precisão.

Geralmente, métodos iterativos para determinar zeros de uma função são os mais utilizados, podendo esses serem os mais diversos, tais como Newton-Raphson, Halley [4], Super-Halley [3] e Chebyshev [5], utilizados tanto para funções reais como para aplicações em espaços mais gerais. Alguns deles têm a necessidade de calcular derivadas de primeira e segunda ordem, o que é uma desvantagem computacional apesar da alta taxa de convergência.

O objetivo deste trabalho é comparar alguns métodos de ponto fixo aplicados ao polinômio interpolador construído através dos polinômios de Chebyshev, visando determinar pelo menos um zero de uma função contínua em um intervalo dado sem exigir o uso de derivadas da função original ou aproximações da mesma.

II. Metodologia

Ao contrário do método de Newton e dos métodos da classe Chebyshev-Halley, onde um modelo local é construído, em [1], [2] é construído um **modelo global** para a função f no intervalo $[a, b]$. Desta maneira, é provado que é possível determinar todo e qualquer zero de uma função real não polinomial $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ usando uma série constituída de polinômios de Chebyshev. Esse modelo global pode ser escrito como

$$m_N(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j T_j(x), \tag{2}$$

onde os coeficientes a_j podem ser obtidos multiplicando valores $f(x_j)$ por uma matriz quadrada do tamanho $N + 1$. Os pontos de interpolação x_j e os elementos da matriz são valores de cosseno, como resulta da identidade de Chebyshev

$$T_n(\cos(t)) \equiv \cos(nt),$$

sendo T_n o polinômio de Chebyshev de grau n.

O modelo (2) dá origem ao algoritmo chamado Algoritmo CPR (Chebyshev-proxy rootfinder) [1], [2]. A ideia chave para determinar os zeros do modelo global construído é calcular os autovalores de uma matriz chamada matriz companheira Chebyshev-Frobenius, cujos elementos são triviais baseados nos coeficientes dos polinômios de Chebyshev. É provado que esses autovalores, que se encontram no intervalo $[a, b]$, são todos os zeros da função f em $[a, b]$. Esse esquema pode ser resumido na Figura 1 extraído de [1].

No mesmo sentido de [1], [2], utilizamos o modelo global (2) para determinar pelo menos um dos zeros de uma função contínua em um intervalo dado através de alguns métodos de ponto fixo, tais como o método de Newton, Halley, Super-Halley e o método de Chebyshev. É importante observar que

Órgão Fomentador: CNPq.

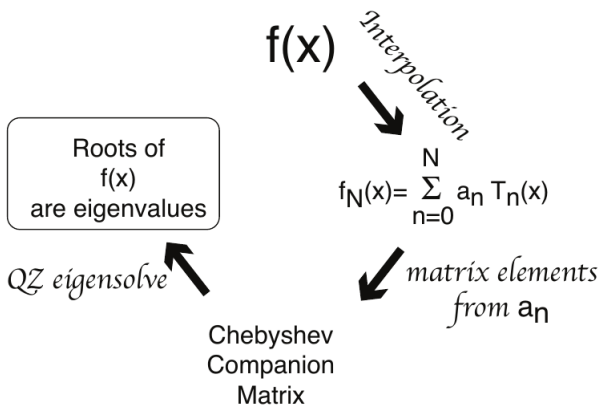

Figura 1. Algoritmo CPR

as derivadas de qualquer ordem dos polinômios de Chebyshev são obtidos facilmente utilizando a fórmula recursiva (1).

Testes computacionais iniciais sugeriram boa adequação do modelo para $N \leq 18$, ou seja, o critério de parada

$$|f(x) - m_N(x)| < \epsilon$$

para todo x no intervalo dado é satisfeito sem a necessidade de um N com valor maior que 18 para se obter um erro real ϵ das raízes nas funções, suficientemente pequeno.

REFERÊNCIAS

[1] J. P. Boyd. Finding the zeros of a univariate equation: proxy roothfinders, Chebyshev interpolation, and the companion matrix. *SIAM review*, 55(2):375–396, 2013.

[2] J. P. Boyd. Computing zeros on a real interval through Chebyshev expansion and polynomial rootfinding. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(5):1666–1682, 2003

[3] J. M. Gutiérrez, M. A. Hernández. An acceleration of Newton's method: super-Halley method. *Applied Mathematics and Computation*, 117, 223–239, 2001

[4] M. A. Mertvecova. Analogue of the process of tangent hyperbolas for general functional equations. *Doklady Akademii Nauk SSSR(NS)*, 88, 611–614, 1953

[5] M. I. Nečepuerenko. On Čebyšev's method for functional equations *Uspehi Matematicheskih Nauk*, 9, 163–170, 1954