

# *Análise não linear de treliças utilizando métodos do tipo Chebyshev-Halley com técnicas de continuação*

*Luiz Antonio Farani de Souza*

Curso de Engenharia Civil

UTFPR

lasouza@utfpr.edu.br

*Emerson Vitor Castelani*

*Wesley Vagner Inês Shirabayashi*

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Universidade Estadual de Maringá - UEM

**Resumo** — Neste artigo são efetuadas análises estáticas, por meio do Método dos Elementos Finitos, de problemas de treliças planas com não linearidade física. Os problemas estruturais são solucionados com métodos do tipo Chebyshev-Halley associados às técnicas de continuação de Controle de Deslocamento Generalizado e de Controle de Comprimento de Arco com Iteração Ortogonal à Tangente da Iteração Anterior. A relação constitutiva do material é descrita por um modelo fundamentado na Mecânica do Dano Contínuo.

**Palavras-chave** — *treliça; Chebyshev; Super-Halley; técnicas de continuação.*

## I. INTRODUÇÃO

Na análise estrutural muitos problemas estão caracterizados pelo comportamento inelástico dos materiais (não linearidade física) que conformam as estruturas, identificando fenômenos tais como plasticidade, dano, fraturamento, entre outros, os quais mudam substancialmente as propriedades de rigidez do sistema. Um problema gerado pela inelasticidade dos materiais é a ocorrência de deformações localizadas no sistema. A consideração desse fenômeno aumenta a complexidade da análise, e pode levar a problemas na implementação numérica, ocorrendo inclusive a interrupção da análise por problemas de convergência ou mau condicionamento numérico. Nesse contexto, a análise numérica de estruturas com características inelásticas de material requer técnicas de controle de iteração e força (técnicas de continuação) que permitam avaliar as mudanças de rigidez do sistema ocasionadas pelo comportamento não linear [1].

O método de Newton é um dos métodos mais utilizados para resolver problemas não lineares na Engenharia Estrutural. Modificações nesse método podem ser feitas: resolver o sistema de equações não lineares de forma inexata, ou seja, resolvê-lo por algum método iterativo impondo uma precisão, como no método de Newton Inexato; aproximar a matriz Jacobiana utilizando diferenças finitas; e substituir a Jacobiana por outra matriz com alguma propriedade, como nos métodos Quase - Newton [2].

No método de Newton é resolvido um sistema linear a cada iteração, cuja matriz de rigidez é a Jacobiana avaliada no iterado corrente. Uma das vantagens desse método é a taxa de convergência quadrática (sob condições adequadas). Além disso, é conhecido na literatura o raio ótimo de convergência desse método; isso significa que, dada uma sequência gerada pelo método de Newton cujo ponto inicial esteja fora da bola

de centro em uma solução e raio ótimo, não se tem garantias que esta sequência irá convergir para a respectiva solução. Entretanto, tomado qualquer ponto inicial dentro desta bola, não só é garantida a convergência, mas também a taxa de convergência quadrática. Há métodos que possuem taxa de convergência cúbica, sendo melhores que o método de Newton neste aspecto, como por exemplo, os métodos pertencentes à classe Chebyshev-Halley.

Uma dificuldade inerente ao método convencional de Newton - Raphson, que tem como estratégia a manutenção do parâmetro de Força Constante durante o ciclo de iterações, é a solução próxima a pontos limites na trajetória de equilíbrio (curva força *versus* deslocamento) divergir devido ao mau condicionamento da matriz de rigidez tangente, ou simplesmente porque para o nível de força estabelecido não há solução [3]. Com o propósito de resolver esses problemas de convergência, técnicas de continuação associadas ao método de Newton - Raphson têm sido desenvolvidas, podendo-se destacar: Controle de Deslocamento [4], Controle de Deslocamento Generalizado [5]-[6] e Controle de Comprimento de Arco [7]-[8]-[9]-[10].

Na técnica de Controle de Força Constante, o parâmetro de força é mantido invariável durante o ciclo iterativo. A ideia dos métodos de continuação é tratar o parâmetro de força como uma variável, adicionando uma condição de restrição ao sistema de equações que descreve o equilíbrio estrutural para a determinação do mesmo. Uma metodologia eficiente de solução deve ser capaz de superar os problemas numéricos associados ao comportamento não linear, traçando toda a trajetória de equilíbrio (caminhos primários e secundários) do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares ou críticos que possam existir [11].

Neste artigo são efetuadas análises estáticas de problemas de treliças planas com não linearidade física por meio do Método dos Elementos Finitos. Os problemas são solucionados com os métodos iterativos de Chebyshev e Super-Halley associados às técnicas de continuação: Controle de Deslocamento Generalizado (GDCM); e Controle de Comprimento de Arco com Iteração Ortogonal à Tangente da Iteração Anterior (CTIA). O desempenho dos métodos implementados com o *software* Matlab são avaliados com base nos parâmetros: número total de incrementos de força (NP), número total de iterações (It), tempo de processamento e deslocamento num ponto específico da estrutura. A relação

constitutiva do material é descrita por um modelo fundamentado na Mecânica do Dano Contínuo proposto por [12], com a possibilidade de prever o comportamento diferenciado à tração ou à compressão.

## II. PROBLEMA ESTRUTURAL

A equação que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural pode ser descrita por [13]:

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{u}), \quad (1)$$

sendo  $\mathbf{g}$  o vetor de forças desequilibradoras,  $\mathbf{F}_i$  o vetor de forças internas (avaliado em função do vetor de deslocamentos totais nos pontos nodais da estrutura  $\mathbf{u}$ ), e  $\lambda$  o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor  $\mathbf{F}_r$ , sendo este um vetor de referência e de magnitude arbitrária. A estimativa para o deslocamento residual  $\delta \mathbf{u}$  é determinada pelo seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad (2)$$

sendo  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural. Os deslocamentos residuais são definidos como a soma de duas parcelas [10]:

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_g + \delta \lambda \delta \mathbf{u}_r, \quad (3)$$

onde  $\delta \lambda$  é o parâmetro de força que deve ser avaliado ao longo do ciclo iterativo, e  $\delta \mathbf{u}_g$  e  $\delta \mathbf{u}_r$  são obtidos, respectivamente, por:

$$\delta \mathbf{u}_g = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}, \quad (4)$$

$$\delta \mathbf{u}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r. \quad (5)$$

Os parâmetros incrementais de força ( $\Delta \lambda$ ) e deslocamento ( $\Delta \mathbf{u}$ ) no passo de força  $t+\Delta t$  e iteração  $k$  são avaliados, respectivamente, por:

$$\Delta \lambda_k = \Delta \lambda_{k-1} + \delta \lambda_k, \quad (6)$$

$$\Delta \mathbf{u}_k = \Delta \mathbf{u}_{k-1} + \delta \mathbf{u}_k. \quad (7)$$

Os parâmetros totais de força ( $\lambda$ ) e deslocamento ( $\mathbf{u}$ ) são atualizados por, respectivamente:

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \Delta \lambda_k, \quad (8)$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1} + \Delta \mathbf{u}_k. \quad (9)$$

A determinação do parâmetro de força iterativo ( $\delta \lambda$ ) é função da estratégia de iteração ou da equação de restrição imposta adicionalmente ao problema não linear. O problema estrutural dado por (2) é avaliado de forma incremental e iterativo, ou seja, para uma sequência de incrementos do parâmetro de força é determinada uma sequência de incrementos de deslocamentos nodais.

## III. MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Os métodos iterativos da família Chebyshev - Halley são descritos pela fórmula [14]:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{L}(\mathbf{u}_k) (\mathbf{I} - \gamma \mathbf{L}(\mathbf{u}_k))^{-1} \right] \delta \mathbf{u}_k, \quad (10)$$

onde  $\gamma$  é um parâmetro real,  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $\mathbf{L}$  é uma matriz calculada por:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{K}(\mathbf{u}_k)^{-1} [\mathbf{H}(\mathbf{u}_k) \delta \mathbf{u}_k]^T. \quad (11)$$

Essa família inclui alguns métodos, como o método de Chebyshev ( $\gamma = 0$ ) e o método de Super-Halley ( $\gamma = 1$ ), os quais possuem convergência cúbica.

Fazendo  $\gamma = 0$  em (10), o método de Chebyshev é dado pela seguinte equação [2]:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{L}(\mathbf{u}_k) \right] \delta \mathbf{u}_k. \quad (12)$$

Da mesma forma, fazendo  $\gamma = 1$  em (10), obtém-se o método de Super-Halley descrito por [14]:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{L}(\mathbf{u}_k) (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\mathbf{u}_k))^{-1} \right] \delta \mathbf{u}_k. \quad (13)$$

Neste trabalho, utiliza-se a seguinte aproximação para a matriz  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{K}(\mathbf{u}_k)^{-1} \frac{[\mathbf{K}(\mathbf{u}_k) + \mathbf{K}(\mathbf{u}_{k-1})]}{2}. \quad (14)$$

## IV. TÉCNICAS DE CONTINUAÇÃO

O processo incremental-iterativo consiste de duas etapas [11]:

1. A partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, seleciona-se um incremento de força (definido como parâmetro de força inicial -  $\delta \lambda_1$ ), procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Após a seleção desse parâmetro, determina-se o incremento inicial de deslocamentos nodais  $\delta \mathbf{u}_1$ ; e

2. Na segunda etapa de solução, procura-se por meio de uma estratégia de continuação corrigir a solução incremental inicialmente proposta, com o objetivo de restaurar o equilíbrio da estrutura. Se as iterações envolverem deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}$ ) e o parâmetro de força ( $\lambda$ ), então uma equação adicional de restrição é requerida. O formato dessa equação é o que distingue as várias estratégias de iteração.

Na Tabela I são apresentadas as equações para a avaliação do parâmetro de força inicial ( $\delta \lambda_1$ ), e para o cálculo do parâmetro de força para a correção da solução incremental inicial ( $\delta \lambda_k$ ) para as estratégias de controle de iteração e força (técnicas de continuação) implementadas:

- Controle de Deslocamento Generalizado (GDCM); e

- Controle de Comprimento de Arco com Iteração Ortogonal à Tangente da Iteração Anterior (CTIA).

Há possibilidade de que o incremento de deslocamento tenda ao infinito em pontos próximos a um ponto limite da trajetória de equilíbrio. Para evitar que isso ocorra, limitou-se este deslocamento a um valor máximo. Para todas as estratégias, foi considerada a seguinte condição quanto ao incremento de deslocamento: se  $\|\delta \mathbf{u}_k\| > u_{\text{máx}}$ , então:

$$\delta \mathbf{u}_k = \frac{u_{\text{máx}}}{\|\delta \mathbf{u}_k\|} \delta \mathbf{u}_k. \quad (15)$$

TABELA I. PARÂMETROS DE FORÇA  $\delta\lambda_1$  E  $\delta\lambda_k$ .

Método	$\delta\lambda_1$	$\delta\lambda_k$ , com $k = 2, 3, \dots, N$
GDCM	$\pm \sqrt{\frac{N_{ot}}{N_{it}}} \delta\lambda_0 \sqrt{ GSP }$	$-\frac{{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_{gk}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_{rk}}$
CTIA		$-\frac{\Delta\mathbf{u}_{k-1}^T \delta\mathbf{u}_{gk}}{\Delta\mathbf{u}_{k-1}^T \delta\mathbf{u}_{rk}}$

O sinal de  $\delta\lambda_1$  é determinado em função do parâmetro de rigidez GSP dado por:

$$GSP = \frac{{}^1\delta\mathbf{u}_{r1}^T {}^1\delta\mathbf{u}_{r1}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_{rk}}. \quad (16)$$

Esse parâmetro torna-se negativo próximo a pontos limites; dessa maneira, se  $GSP < 0$ , então  $\delta\lambda_1 = -\delta\lambda_1$ . Uma estratégia adaptativa é a determinação automática da variação do parâmetro de força inicial, que consiste em, ao final de cada passo da análise, monitorar o número de iterações para a convergência ( $N_{it}$ ) da técnica iterativa e compará-lo a um valor ótimo ( $N_{ot}$ ) [15].

## V. MODELO CONSTITUTIVO BASEADO NA MECÂNICA DO DANO

Para descrever o comportamento do material, utiliza-se um modelo baseado na Mecânica do Dano Contínuo proposto por [12]. Para o caso de um elemento unidimensional submetido a uma força axial, a tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  é expressada por:

$$\bar{\sigma} = E_0 \varepsilon. \quad (17)$$

O limite de dano inicial  $r_0$  é uma propriedade do material e pode ser relacionado à tensão limite de proporcionalidade  $f_0$  da seguinte forma:

$$r_0 = \frac{f_0}{\sqrt{E_0}}. \quad (18)$$

Define-se a norma da tensão efetiva  $\tau(\bar{\sigma})$  por:

$$\tau(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{E_0}}. \quad (19)$$

A partir das relações de Kuhn - Tucker, o limite de dano é dado pelo máximo valor da variável  $\tau$  durante o processo de carregamento, tal que:

$$r = \max(r_0, \tau). \quad (20)$$

Com (17) e (19),  $\tau$  pode ser expresso em termos da deformação específica  $\varepsilon$  por:

$$\tau(\varepsilon) = \sqrt{E_0} \varepsilon. \quad (21)$$

A variável de dano  $d$  é escrita em função do módulo  $H$  e do limite de dano  $r$  por:

$$d = \frac{r - r_0}{r(1 + H)}. \quad (22)$$

A tensão normal  $\sigma$  é calculada por:

$$\sigma = E\varepsilon = (1 - d)E_0\varepsilon, \quad (23)$$

sendo  $E_0$  o módulo de elasticidade longitudinal do material não danificado. Variando-se a função que descreve o módulo  $H$ ,

tem-se na Fig. 1 em: (a) regime elastodegradável perfeito (perfeitamente plástico); em (b) encruamento linear positivo (endurecimento); em (c) encruamento linear negativo (abrandamento); e em (d) abrandamento exponencial.

Para o caso de um procedimento incremental, o dano  $d$  no passo de força  $t+\Delta t$  é obtido com base na deformação específica na barra ( $\varepsilon$ ), na iteração  $k$ , pelo algoritmo do modelo constitutivo de dano diferenciado à tração e à compressão apresentado na Fig. 2. No algoritmo, os subíndices "c" e "t" significam compressão e tração, respectivamente.

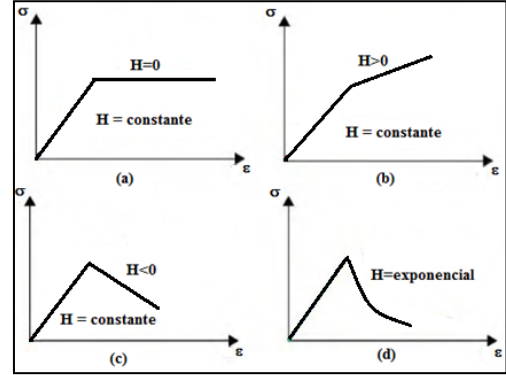


Fig. 1. Comportamentos distintos de endurecimento/abrandamento.

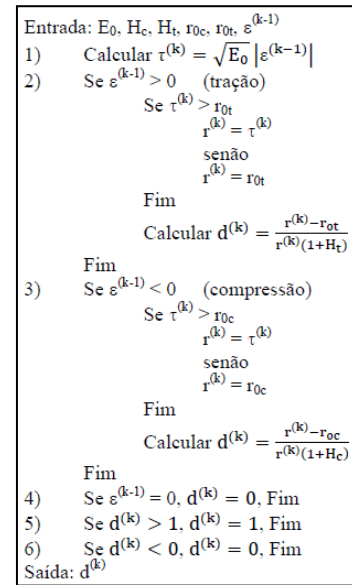


Fig. 2. Algoritmo para o modelo de dano diferenciado à tração e à compressão.

## VI. CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Em qualquer processo iterativo, a solução não é exata, ou seja, é calculada aproximadamente. Portanto, limites de tolerância devem ser impostos para a interrupção do processo. Dois critérios de convergência foram estabelecidos, um baseado nos deslocamentos e o outro nas forças, segundo as desigualdades, respectivamente:

$$\frac{\|\Delta\mathbf{u}\|}{\|\delta\mathbf{u}\|} < \zeta, \quad (24)$$

$$\|\mathbf{g}\| < \zeta. \quad (25)$$

## VII. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos de problemas de treliças planas com comportamento não linear encontrados na literatura, com o intuito de aplicar e comparar os métodos de solução. Em todas as análises estruturais, considerou-se para a verificação da convergência a cada iteração  $k$  a tolerância  $\zeta$  igual a  $10^{-5}$ . O peso próprio das estruturas é desprezado nas análises. Deve-se ressaltar, ainda, que não estão contabilizadas no tempo de processamento a geração da malha e a visualização dos resultados.

### A. Barra comprimida

Seja a barra comprimida com área da seção transversal  $(1,0 \times 1,0) \text{ m}^2$  e comprimento  $L = 12 \text{ m}$  constituída por dois tipos de materiais, conforme é apresentada na Fig. 3. Este problema foi estudado por [16]. Considera-se que os materiais tenham comportamento bilinear com encruamento negativo (Fig. 1c), de modo que o elemento central seja menos resistente que os demais. Os parâmetros materiais para as barras são mostrados na Tabela II. Os parâmetros para os métodos de continuação são:  $N_{ot} = 5$ ;  $\delta\lambda_0 = 5,5$ ;  $u_{m\acute{a}x} = 0,1$ ; e  $\Delta P = 0,1 \text{ MN}$ .

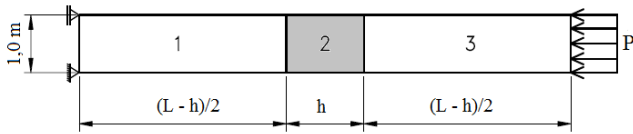


Fig. 3. Desenho estrutural esquemático da barra com dois tipos de materiais.

TABELA II. PARÂMETROS DO MODELO CONSTITUTIVO DE DANO.

Barra 2	Barras 1 e 3
$E_0 = 20,0 \text{ GPa}$	$E_0 = 20,0 \text{ GPa}$
$f_0 = 20,0 \text{ MPa}$	$f_0 = 25,0 \text{ MPa}$
$H = -0,2$	$H = -0,2$
$B_1 = 1,0$	$B_1 = 1,0$

Os resultados numéricos NP, It, tempo de processamento e deslocamento horizontal na extremidade livre da barra são apresentados na Tabela III, considerando  $h = 1/3L$  na Fig. 3. Vê-se, nessa tabela, o melhor desempenho do método de Chebyshev em comparação com os métodos de Newton-Raphson e Super-Halley, independentemente da técnica de continuação adotada. Um maior esforço necessário para cada etapa dos métodos de Chebyshev e Super-Halley em relação ao método de Newton-Raphson é compensado com um menor número de iterações para a precisão desejada.

Na Fig. 4 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio (deslocamento horizontal na extremidade livre da barra *versus* força  $P$ ) obtidas com os métodos implementados, havendo boa concordância com a curva obtida por [16]. Os algoritmos implementados conseguiram identificar o ponto limite na trajetória ( $P = 20,0 \text{ MN/m}^2$ ) e ultrapassá-lo alcançando o próximo ponto de equilíbrio. Comparando as estratégias de continuação, vê-se que as simulações com a técnica CTIA obtiveram o menor tempo de processamento, uma vez que foi necessário um número menor de interações (It) e passos de força (NP) até o fim da simulação.

TABELA III. RESULTADOS NUMÉRICOS.

Método de Chebyshev				
Estratégia	It	NP	Tempo (s)	Deslocamento (m)
GDCM	983	45	0,307003	-0,016197248789344
CTIA	615	43	0,197273	-0,016238569265574
Método de Super-Halley				
Estratégia	It	NP	Tempo (s)	Deslocamento (m)
GDCM	1946	61	0,555012	-0,016189272056167
CTIA	1243	58	0,379579	-0,016167574060032
Método de Newton - Raphson				
Estratégia	It	NP	Tempo (s)	Deslocamento (m)
GDCM	3195	75	0,804061	-0,016124922430110
CTIA	2148	73	0,571444	-0,016154671081090

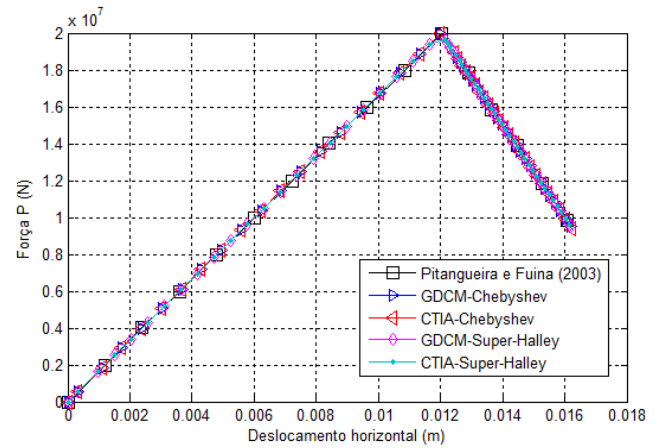


Fig. 4. Trajetórias de equilíbrio.

### B. Treliça plana

Analisado por [17], este problema consiste de uma treliça plana com duas forças concentradas  $P$  aplicadas simetricamente (Fig. 5). O material que constitui as barras apresenta comportamento elástico idealmente plástico (Fig. 1a). Para o modelo de dano, considerou-se os seguintes parâmetros:  $E_0 A = 10^5 \text{ kN}$ ;  $f_0 = 65 \text{ KPa}$  (diagonais);  $f_0 = 61,1 \text{ KPa}$  (demais barras);  $H = 0,0$ ; e  $B_1 = 1,0$ . Os parâmetros para os métodos de continuação são:  $N_{ot} = 5$ ;  $\delta\lambda_0 = 4,0$ ;  $u_{m\acute{a}x} = 0,025$ ; e  $\Delta P = 2,5 \text{ kN}$ .

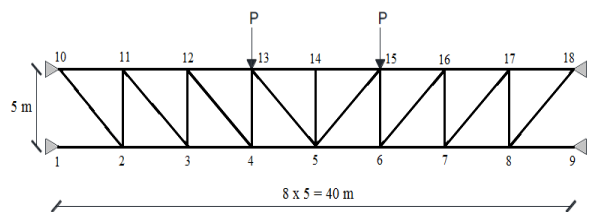


Fig. 5. Modelo estrutural da treliça plana.

Na Fig. 6 são mostradas as trajetórias de equilíbrio (deslocamento vertical no nó 5 *versus* força  $P$ ) com os métodos de solução de Chebyshev e Super-Halley associados às técnicas de continuação. Observa-se, nessa figura, que para a força  $P$  igual a  $40,7333 \text{ kN}$ , aproximadamente, há aumento do deslocamento vertical sem acréscimo de força. As barras 1-2, 4-5, 5-6 e 8-9 atingem a tensão de escoamento em primeiro, apresentando comportamento plástico. Os resultados numéricos são mostrados na Tabela IV, verificando-se o melhor

desempenho computacional dos métodos de Chebyshev e Super-Halley em contraste com o de Newton-Raphson. Cada estratégia de continuação apresenta características peculiares, visto que uma pode demandar maior tempo de processamento em relação à outra, dependendo do problema analisado.

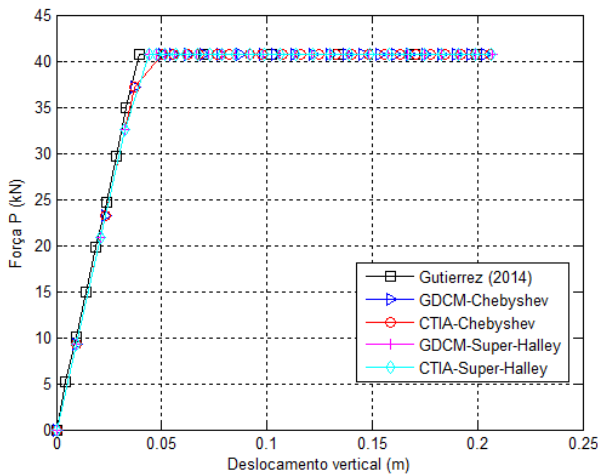


Fig. 6. Trajetórias de equilíbrio.

TABELA IV. RESULTADOS NUMÉRICOS.

Método de Chebyshev				
Métodos	It	NP	Tempo (s)	Deslocamento (in)
GDCM	365	24	0,893217	-0,203842450233608
CTIA	414	25	0,987312	-0,205874897500063
Método de Super-Halley				
Métodos	It	NP	Tempo (s)	Deslocamento (in)
GDCM	388	27	0,975899	-0,206922857891143
CTIA	382	27	0,948284	-0,206578269206597
Método de Newton - Raphson				
Métodos	It	NP	Tempo (s)	Deslocamento (in)
GDCM	749	39	1,753208	-0,204647577282017
CTIA	738	39	1,755630	-0,205088611032850

### VIII. CONCLUSÃO

A partir dos exemplos numéricos estudados, destaca-se a boa concordância entre os resultados obtidos e os da literatura no que tange à obtenção das trajetórias de equilíbrio, validando o código computacional desenvolvido. Observa-se que o tipo de lei constitutiva adotada para o material é uma das causas da maior ou menor eficiência dos processos para a busca do equilíbrio. Uma lei elastoplástica perfeita pode conduzir a uma situação em que a estrutura apresente grandes deformações antes de alcançar o equilíbrio.

A crescente simulação de modelos estruturais complexos por meio do Método dos Elementos Finitos tem exigido a manipulação de grande quantidade de dados, que é intrínseco ao método, bem como a procura da diminuição do tempo de resposta para a resolução do problema estrutural.

Apesar dos métodos da classe Chebyshev-Halley serem muito atrativos para resolver problemas não lineares por terem taxa de convergência cúbica, eles são computacionalmente caros basicamente por dois motivos: a necessidade de se obter

a matriz  $L$  a cada iteração; e resolver dois sistemas lineares. Com a aproximação proposta neste trabalho para a matriz  $L$ , as análises com esses métodos se mostraram promissoras, visto que conseguiram alcançar a solução (trajetória de equilíbrio) com um número inferior de passos de força e iterações, em contraste com o método de Newton-Raphson, tanto para a técnica de continuação GDCM quanto para CTIA.

Nota-se que na iteração dos métodos de Chebyshev e Super-Halley é utilizada a mesma matriz de rigidez para a solução dos sistemas de equações lineares; assim, estes sistemas podem ser solucionados via decomposição (por exemplo, decomposição LU ou fatoração de Cholesky), uma vez que uma única fatoração no início da iteração é necessária.

A matriz de rigidez do sistema estrutural  $K$  é caracterizada por um elevado índice de esparsidade. Pode-se obter uma melhor eficiência numérica dos modelos apresentados por meio de algoritmos que armazenam os coeficientes não nulos presentes na matriz e efetuam operações entre matrizes e vetores com estes coeficientes evitando, dessa maneira, os cálculos redundantes envolvendo elementos nulos.

### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem pelo apoio da UTFPR e Programa de Pós-Graduação em Matemática da UEM.

### REFERÊNCIAS

- [1] L. F. P. Muñoz, e D. M. Roehl, "Comparação de Métodos de Continuação em Problemas com Análise Inelástica", Congresso Argentino de Mecânica Computacional, vol. XXXI, Salta, Argentina, pp. 4155-4175, 2012.
- [2] R. G. Eustáquio, "Classe de métodos Chebyshev-Halley inexata livre de tensores com convergência cúbica para resolução de sistemas não lineares e um estudo sobre raio de convergência", Tese (Doutorado), Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, 2013.
- [3] R. A. M. Silveira, G. Rocha, e P. B. Gonçalves, "Estratégias numéricas para análises geometricamente não lineares", XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Águas de Lindóia, 1999.
- [4] J. L. Batoz, and G. Dhat, "Incremental displacement algorithms for nonlinear problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 14, pp. 1262-1267, 1979.
- [5] Y. B. Yang, and S. R. Kuo, "Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures". Singapore: Prentice - Hall, 1994.
- [6] Y. B. Yang, and, M. S. Shieh, "Solution method for nonlinear problems with multiple critical points", AIAA Journal, vol. 28, n.12, pp. 2110-2116, 1990.
- [7] E. Riks, "The application of Newton's methods to the problems elastic stability", Journal of Applied Mechanics, vol. 39, pp. 1060-1066, 1972.
- [8] E. Riks, "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems", International Journal of Solids and Structures, vol. 15, pp. 529-551, 1979.
- [9] E. Ramm, "Strategies for tracing the non-linear response near limit-points, nonlinear finite element analysis in structural mechanics", Wunderlich, W. (ed.). Berlin: Springer-Verlag, pp. 63-89, 1981.
- [10] M. A. Crisfield, "Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", vol. 1, Essentials. New York: John Wiley & Sons Ltd., 1991.
- [11] G. Rocha, "Estratégias de incremento de carga e de iteração para análise não linear de estruturas", Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Ouro Preto, Escola de Minas, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto, 2000.

- [12] O. L. Manzoli, "Um modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes em la mecánica de sólidos", Tese (Doutorado), Escola Técnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1998.
- [13] D. P. Maximiano, "Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas", Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.
- [14] T. Steihaug, and S. Suleiman, "Rate of convergence of higher order methods. Applied", Numerical Mathematics, vol. 6, n. 1, pp. 230–242, 2013.
- [15] S. Bocanegra, F. F. Campos, e A. R. L. Oliveira, "Using a hybrid preconditioner for solving large-scale linear systems arising from interior point methods", Computational Optimization and Applications, vol. 36, pp. 149 – 164, 2007.
- [16] R. L. Pitangueira, e J. S. Fuina, "Combinações de deformações para controlar trajetórias de equilíbrio em análise não-linear de estruturas", Congresso Argentino de Mecánica Computacional, vol. XXII, Bahía Blanca, Argentina, pp. 596-610, 2003.
- [17] M. P. D. Gutiérrez, "Análise elastoplástica de estruturas metálicas usando o conceito de rótulas plásticas e o algoritmo de retorno radial", Dissertação (Mestrado), Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Brasília, Brasil, 2014.