

# Uma avaliação comparativa da convergência do método de volumes finitos baseado em elementos para a condução de calor

D. Prestini, P.S.B. Zdanski, M. Vaz Jr.  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade do Estado de Santa Catarina  
89219-710 Joinville-SC

**Resumo**—Este trabalho apresenta um estudo comparativo dos erros de discretização para o método de volumes finitos baseado em elementos. A partir de malhas cartesianas, foram estudadas a estimativa de erro de Richardson e a avaliação comparativa com o método clássico de volumes finitos. Neste caso, verificou-se que o método de volumes finitos baseado em elementos apresentou erros sensivelmente menores. Um breve estudo para malha não estruturada também é apresentado, no qual foram comparados os métodos de elementos finitos e volumes finitos baseado em elementos. No exemplo estudado, o método de volumes finitos baseado em elementos apresentou erros ligeiramente inferiores ao método de elementos finitos.

**Palavras-chave**—condução de calor; volumes finitos; volumes finitos baseado em elementos; erro de Richardson

## I. INTRODUÇÃO

O método dos volumes finitos baseado em elementos (*MVFbE*) combina robustez do método dos volumes finitos porque calcula as derivadas das equações aproximadas a partir de balanços de massa, quantidade de movimento e energia nos volumes discretos (volumes de controle) com a característica da flexibilidade geométrica do método dos elementos finitos, porque utiliza malhas não estruturadas com as interpolações nos elementos realizadas via funções de forma [1, 2].

O método de volumes finitos clássico define o volume de controle delimitado pelos nós da malha como a região do domínio onde as equações diferenciais governantes são integradas, ou seja, o conceito tradicional usado em volumes finitos estabelece que o elemento da malha e o volume de controle são entes geométricos coincidentes (*cell centered construction*), como demonstrado na Fig. 1a. Percebe-se que os nós fornecidos pelo gerador de malha servem para delimitar espacialmente o volume de controle, mas as propriedades são calculadas no seu centro geométrico. No *MVFbE*, por sua vez, o volume de controle não coincide mais com o elemento, e é construído ao redor dos nós da malha (*cell vertex construction*), conforme mostrado na Fig. 1b, através da união de parcelas (sub-volumes de controle) provenientes dos elementos que rodeiam determinado nó [1,4].

A utilização do método *MVFbE* dá origem a volumes de controle com um maior número de vizinhos, em função do uso das funções de forma definidas no elemento, com potencial aumento da precisão do método [1, 3].

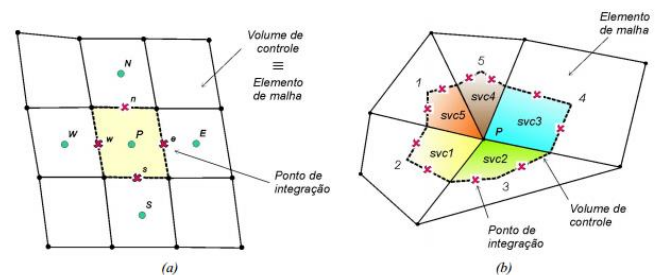


Fig. 1 - Definição dos elementos e volumes de controle no (a) Método de Volumes Finitos (MVF) e (b) no Método de Volumes Finitos baseado em Elementos (MVFbE). [4]

No método de volumes finitos baseado em elementos, todos os cálculos utilizados para a construção das equações discretizadas são realizados em nível de elemento, por isso o nome “baseado em elementos”. Depois, mediante a um processo de montagem, semelhante ao empregado no método dos elementos finitos, obtém-se as equações de balanço referidas aos volumes de controle. Para tanto, em cada elemento é considerado um sistema de coordenadas locais, no qual são expressos todos os termos das equações diferenciais discretizadas. Após serem calculadas elemento por elemento, todas as contribuições são somadas a fim de construir as equações de balanço de todos os volumes de controle na malha computacional [2].

## II. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E DISCRETIZAÇÃO

O problema de condução de calor bidimensional em regime permanente sem fonte de calor é caracterizado pela equação diferencial

$$\text{div}[q_k] = 0, \quad (1)$$

onde  $q_k$  é a Lei de Fourier,  $q_k = -\mathbf{k}\nabla T$ , e  $\mathbf{k}$  é o tensor condutividade térmica. Para material isotrópico, o tensor  $\mathbf{k}$  reduz-se a um escalar  $k$  constante.

Deste modo, a equação geral para o problema de transferência de calor em regime permanente é:

$$\text{div}[\nabla T] = 0, \quad (2)$$

que, em coordenadas cartesianas, pode ser representada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

Integrando a equação diferencial (3) no volume, tem-se

$$\int_{VC} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dV = \int_{VC} \nabla[\nabla T] dV = 0, \quad (4)$$

Utilizando o método dos resíduos ponderados-Galerkin para a obtenção da equação discretizada, obtém-se

$$\int_{VC} w \nabla[\nabla T] dV = 0, \quad (5)$$

Aplicando em (5) o Teorema da Divergência tem-se:

$$\int_{SC} w \nabla T \cdot \mathbf{n} dA = 0, \quad (6)$$

onde  $\mathbf{n}$  representa o vetor unitário ortogonal a face do volume de controle. Transformando na forma matricial obtém-se:

$$\int_{SC} w \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} dA = 0 \quad (7)$$

No método de volumes finitos, os balanços de conservação para se obter as equações aproximadas são realizados sobre os volumes de controle. Entretanto, conforme mencionado

anteriormente, a base da metodologia do método de volumes finitos baseado em elementos é realizar todas as operações em nível de elementos, e não trabalhar diretamente com os volumes de controle. Sendo assim, é conveniente definir um sistema local de coordenadas para o elemento, o que permite um tratamento independente qualquer que seja sua forma geométrica específica. Este elemento de tamanho e forma arbitrário em relação ao sistema global é mapeado em um elemento regular de tamanho e forma fixos, quando representado num sistema de coordenadas local apropriado. Conseqüentemente, a representação, em coordenadas locais, de qualquer expressão matemática envolvida nas equações de conservação, se torna idêntica para qualquer elemento da malha.

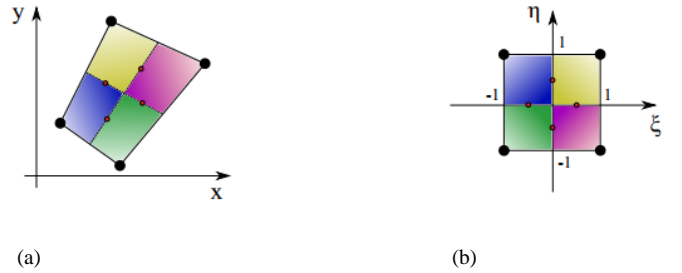


Fig. 2 – Transformação de coordenadas para elemento quadrilátero: (a) Elemento no plano real, (b) Elemento no plano transformado. [2]

As equações de conservação e a geometria da malha estão definidas com base nas coordenadas globais (cartesianas)  $(x, y)$ , sendo assim, é necessário que as equações sejam transformadas para o sistema de coordenadas local do elemento, denotado como  $(\xi, \eta)$ , através de relações matemáticas. Precisam-se definir relações que mapeiem qualquer ponto no interior ou sobre as fronteiras de um elemento, do espaço físico (coordenadas globais) para um elemento regular do espaço transformado (coordenadas locais) e deste poder retornar ao espaço físico, por meio da relação inversa (Fig. 2). Ambos os sistemas de coordenadas podem ser relacionados por equações de transformação escritas na forma

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot x_i, \quad (8)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i, \quad (9)$$

onde as funções de forma são dadas por

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad (10)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \quad (11)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad , \quad (12)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad . \quad (13)$$

A aproximação local da temperatura pode ser calculada através de:

$$T(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) T_i, \quad (14)$$

onde  $N_i(\xi, \eta)$  são funções de forma e  $T_i$  são valores nodais correspondentes a temperatura.

Aproximação do gradiente de temperatura pode ser feito pela equação:

$$\nabla T = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} T_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} T_i \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

sendo que:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}. \quad (17)$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} [D], \quad (18)$$

onde  $[J]$  é a matriz Jacobiana de transformação e  $[D]$  é a matriz de derivadas das funções de forma.

Utilizando as Equações (16), (17), (18) e (19) pode-se, finalmente, obter a forma matricial do gradiente de temperatura:

$$\nabla T = [J]^{-1} [D] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix}, \quad (19)$$

onde  $\{T_i\}$  é o vetor com os valores nodais da temperatura no elemento que estamos analisando.

Como é utilizado o método dos resíduos ponderados-Galerkin para a obtenção da equação discretizada, tem-se que a função peso é igual a  $w = 1$  para o *MVFBE*, portanto

$$\int_{SC} \nabla T \cdot \mathbf{n} \, dA = \sum_i (\nabla T \cdot \mathbf{n}_i \, \Delta A_i) = 0 \quad (20)$$

onde  $i$  representa os pontos de integração (Fig. 1).

Esta consideração faz com que esta equação seja transformada em um conjunto de  $n$  equações, dando origem a um sistema de equações lineares com a seguinte forma geral:

$$[K]\{T\} + \{f\} = 0 \quad (21)$$

onde  $\{T\}$  é um vetor contendo as variáveis do problema (temperatura),  $[K]$  é a matriz dos coeficientes, também conhecida como matriz de rigidez global, e  $\{f\}$  é o vetor independente.

### III. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A avaliação de convergência do *MVFBE* é feita através da comparação da solução numérica com a solução analítica para o problema de condução de calor em uma placa plana com temperatura prescrita nas fronteiras. Neste caso, as condições de contorno são  $T(x = 0, y) = T(x = L, y) = T(x, y = 0) = 0$  e  $T(x, y = H) = T_m \text{ sen}(\pi x/L)$ . A solução analítica adimensional da equação é

$$T(x, y) = T_m \frac{\text{senh}(\pi x/L)}{\text{senh}(\pi H/L)} \text{sen}(\pi x/L) \quad (22)$$

onde  $H = L = 1$  e  $T_m = 1$ .

Além da avaliação através da comparação da solução analítica, os erros de discretização também são verificados pela estimativa de Richardson [5]. Deste modo, pretende-se investigar a precisão desta aproximação com vistas a empregá-la em problemas mais complexos.

O erro de Richardson exige que [6] (i) a solução seja suficientemente suave para que se possa assumir que a expansão em série de Taylor do erro seja justificada, (ii) a ordem de convergência do erro,  $p$ , seja conhecida e (iii) a convergência seja monotônica e assintótica. Em geral, a ordem de convergência do erro não é conhecida *a priori*, assim uma estimativa pode ser feita, de modo que a estimativa da ordem e o erro são aproximados por

$$\tilde{p} = \log \left( \frac{T_{h3} - T_{h2}}{T_{h2} - T_{h1}} \right) / \log(r) \quad \text{e} \quad \varepsilon_{h1}^R = T_e - T_{h1} \cong \frac{T_{h1} - T_{h2}}{r^{\tilde{p}} - 1} \quad (23)$$

onde  $h_3 > h_2 > h_1$  representam o tamanho das malhas e  $r = h_2/h_1 = h_3/h_2$  é a razão de refino da malha. A medida global do erro de Richardson é feita pela estimativa média quadrática (RMS),

$$|\varepsilon_{h1}^R|_{RMS}^2 = \frac{1}{N_R} \sum_{i=1}^{N_R} (\varepsilon_{h1,i}^R)^2 \quad (24)$$

onde  $N_R$  é o número total de nós coincidentes das malhas  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$ .

As simulações foram feitas para seis malhas estruturadas de volumes quadrilaterais com razão de refino  $r = 2$ , sendo que a malha mais refinada possui  $64 \times 64$  volumes, totalizando 4225 nós (tamanho característico  $h = 0,015625$ ). A solução pelo *MVfBE* foi também comparada com aquela obtida pelo método clássico de volumes finitos (*MVF*) em uma tentativa de estabelecer o nível relativo de precisão do primeiro. O *MVF* é resolvido usando interpolação linear com um ponto de integração em cada face da superfície de controle (ver Patankar [7] para maiores detalhes da formulação pelo *MVF*).

A Figura 3 apresenta o erro local exato e a estimativa de Richardson para os *MVfBE* e *MVF* ao longo da coluna central ( $x = 0,5$ ) para as malhas  $64 \times 64$  ( $h = 0,015625$ ) e  $32 \times 32$  ( $h = 0,03125$ ) volumes. Os resultados mostram que o erro de Richardson apresenta uma boa estimativa do erro exato (em ambos os casos a ordem de convergência observada foi próxima a 2). É relevante o fato que o *MVfBE* apresenta erros locais substancialmente menores do que aqueles observados para o *MVF*, ou seja,  $\varepsilon_h^{MVfBE} \cong 0,5 \varepsilon_h^{MVF}$  para todos os pontos ao longo da coluna central (onde ocorrem os maiores erros locais, conforme pode ser visto na Figura 4). A maior precisão exibida pelo *MVfBE* se deve ao número de pontos de integração na fronteira: o *MVfBE* utiliza 8 pontos de integração enquanto que o *MVF* calcula a integral de superfície utilizando apenas 4 pontos (interpolação linear).

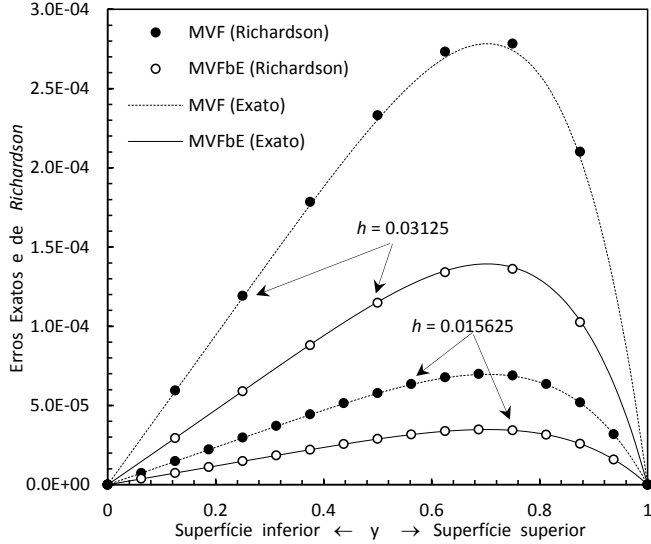


Fig. 3 Erros locais exatos e de Richardson na coluna central para as malhas  $32 \times 32$  e  $64 \times 64$  volumes.

Os erros globais (erro médio quadrático) exato e de Richardson são apresentados na Figura 5. Os erros globais refletem diretamente o comportamento local descrito nos

parágrafos anteriores, i.e. (i) o erro de Richardson aproxima o erro exato global com boa precisão e (ii) o *MVfBE* apresenta erros globais menores do que aqueles exibidos pelo *MVF*. A Figura 5 também apresenta o ajuste de curva para os erros globais para ambos os métodos de discretização:

$$\begin{aligned} MVF : \quad & |\varepsilon_h|_{RMS} = 0.10981 \times h^{1.9449} \\ MVfBE : \quad & |\varepsilon_h|_{RMS} = 0.0056892 \times h^{1.9541} \end{aligned} \quad (25)$$

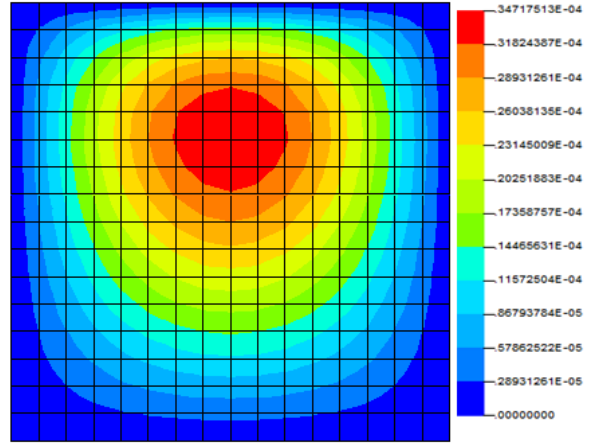


Fig. 4 Erro de Richardson para o *MVfBE* para a malha  $64 \times 64$  volumes.

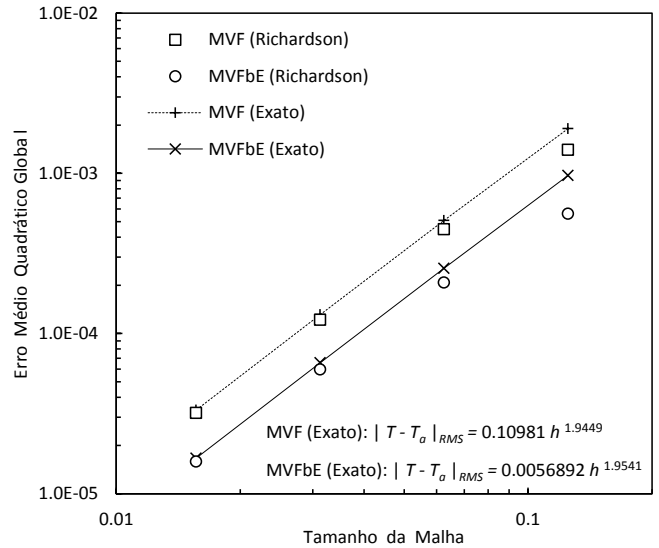


Fig. 5 Erro médio quadrático exato e de Richardson.

A maior vantagem do *MVfBE* sobre o método de volumes finitos clássico é a capacidade do primeiro em poder utilizar malhas não estruturadas (estrutura de dados baseada no método de elementos finitos). Assim, um breve estudo comparativo com o método de elementos finitos (*MEF*) será apresentado. Maiores detalhes sobre o *MEF* podem ser encontrados em [8].

A malha não estruturada utilizada pelos *MVFbE* e *MEF* apresenta uma grande distorção e contém 666 elementos quadrilaterais e 707 nós. É interessante notar que há basicamente três tipos de volumes de controle no que tange o número de pontos de integração na face: 6, 8 e 12 pontos para volumes compartilhando os nós centrais com 3, 4 e 6 elementos, respectivamente. Ressalta-se que a solução pelo *MEF* utiliza uma aproximação linear, elementos isoparamétricos com integração no volume efetuada pela regra de quadratura de Gauss com 4 pontos de integração.

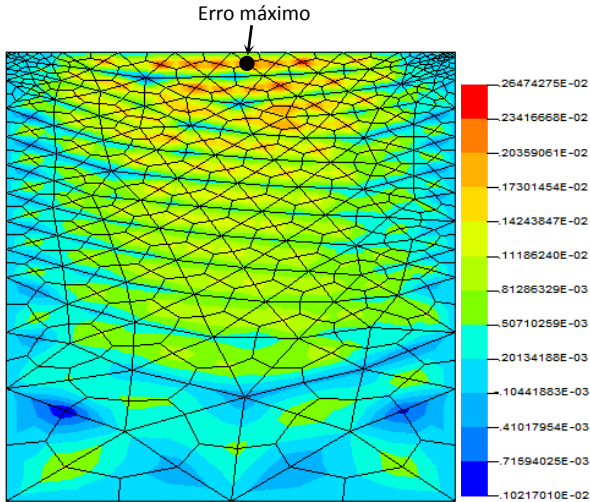


Fig. 6 Erro local exato para o MVFbE.

As Figuras 6 e 7 mostram a distribuição de erros exatos,  $\epsilon_h^e$ , para ambos métodos. A similaridade entre os métodos levou a um padrão de distribuição de erros bastante semelhante: erros maiores próximo à fronteira superior ( $x, y = H$ ). As simulações também mostraram que os erros máximos locais foram  $\epsilon_{MVFbE}^e = 2.6474 \times 10^{-3}$  e  $\epsilon_{MEF}^e = 3.2702 \times 10^{-3}$ , respectivamente (a localização dos erros está indicada nas Figuras 7 e 8). Os erros globais correspondentes obtidos foram  $|\epsilon_{MVFbE}^e|_{RMS} = 8.5009 \times 10^{-4}$  e  $|\epsilon_{MEF}^e|_{RMS} = 8.6996 \times 10^{-3}$ .

#### IV. CONCLUSÕES

As simulações mostraram que a estimativa de Richardson resultou em uma boa predição de erro para o problema analisado quando comparado com o erro exato. Também verificou-se que o *MVFbE* apresenta erros substancialmente menores do que a aproximação clássica do *MVF* devido a um maior número de pontos de integração nas faces dos volumes. A solução pelo *MVFbE* utilizando malha não estruturada foi

comparada com o *MEF*. Verificou-se que também neste caso o *MVFbE* produziu erros ligeiramente menores.

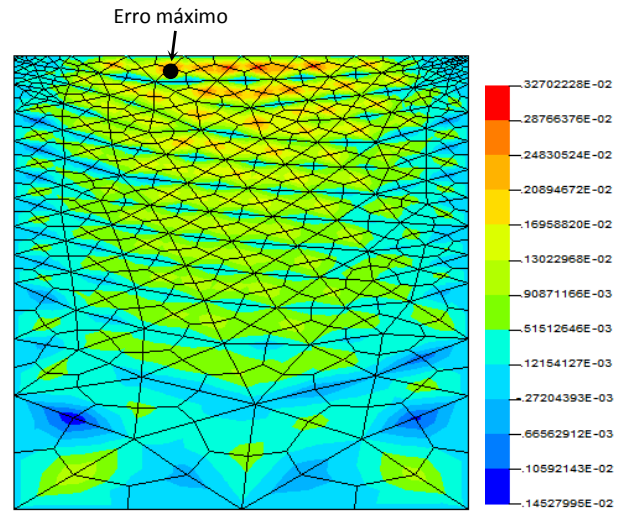


Fig. 7 Erro local exato para o método de elementos finitos.

#### REFERÊNCIAS

- [1] C.R. Maliska, "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional." 2ª. Edição revista e ampliada, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 2004.
- [2] C.R. Garibotti, "Uma Metodologia de Volumes Finitos para a Resolução de escoamentos Viscoelásticos com Malhas Não-Estruturadas Híbridas." Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2014.
- [3] M. Raw, "A New Control Volume Based Finite Element Procedure for the Numerical Solution of the Fluid Flow and Scalar Transport Equations." Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1985.
- [4] J. Cordazzo, "Simulação de Reservatórios de Petróleo Utilizando o Método EbFVM e Multigrid Algébrico." Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.
- [5] L.F. Richardson, "The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stresses in a masonry dam," Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, vol. 210, pp. 307-357, 1910.
- [6] W.L. Oberkampf, T.G. Trucano, "Verification and validation in computational fluid dynamics," Prog. Aerospace Sci., vol. 38, pp. 209-272, 2002.
- [7] S.V Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. McGraw-Hill Book Company: New York, 1980.
- [8] O.C. Zienkiewicz, R.L Taylor, The Finite Element Method, vol. 1 (5th edn). Butterworth-Heinemann: London, 2000.