SISTEMAS P-FUZZY APLICADOS À DINÂMICA POPULACIONAL

Miriam Eulalina Martins*, Rodney Carlos Bassanezi, Cid Marcos G. Andrade

Uningá – Centro Universitário Ingá – PR, prof.miriammartins@uninga.edu.br

Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Campinas – SP

Universidade Estadual de Maringá – UEM, Maringá – PR

Resumo

Neste trabalho analisamos a dinâmica populacional de espécies isoladas através de um sistema p-fuzzy, obtido por meio de uma base de regras e um controlador fuzzy do tipo Mamdani e mostramos que existe uma boa aproximação comportamental entre a formulação p-fuzzy e a formulação clássica. Utilizamos os sistemas p-fuzzy unidimensionais para recuperarmos os modelos clássicos, isto é, determinamos o cálculo de parâmetros, concluindo que a modelagem matemática em dinâmica populacional com sistemas p-fuzzy é uma ferramenta muito útil e eficaz para o estudo desses problemas.

Palavras – chave: Sistema p-fuzzy, controlador fuzzy e dinâmica populacional.

Introdução

As equações diferenciais ordinárias constituem uma poderosa ferramenta para modelagem matemática para o estudo da dinâmica populacional. Entretanto, apesar de muito útil, a modelagem determinística exige que tenhamos um bom conhecimento do fenômeno a ser modelado, isto é, que saibamos como as variáveis de estado e suas variações se relacionam, pois é através do conhecimento do fenômeno que podemos escolher a função que determina a variação com relação ao estado da variável. Esse fato limita a modelagem de muitos fenômenos, pois na maioria das vezes a relação entre as variáveis de estado e suas variações ou é subjetiva ou é conhecida parcialmente. Por isso abordamos a modelagem matemática de dinâmica populacional de espécies isoladas que incorporam subjetividades. Essa modelagem é feita através dos sistemas p-fuzzy. Os sistemas p-fuzzy incorporam informações subjetivas tanto nas variáveis quanto nas variações e suas relações com as variáveis, tornando os modelos mais aplicáveis e realísticos (veja [1], [2], [3] e [5]).

Modelo de crescimento populacional unidimensional inibido

Para obtermos o sistema p-fuzzy que descreve um modelo de crescimento populacional unidimensional inibido, primeiramente, definimos as variáveis linguísticas *população* e *variação*, que serão as variáveis de entrada e saída do sistema p-fuzzy respectivamente. Para a variável *população*, definimos os seguintes termos linguísticos: baixa (B), média baixa (MB), média (M), alta (A), média alta (MA) e altíssima (AL) e para variação, os termos linguísticos são: baixa negativa (Bn), baixa positiva (Bp), média positiva (Mp) e alta positiva (Ap).

Figura 1: Variável de entrada: População.

Figura 2: Variável de saída: Variação.

Uma base de regras que descreve a relação entre a população e a variação é dada por:

1. Se a população é baixa (B) então a variação é baixa positiva (Bp);
2. Se a população é média baixa (MB) então a variação é média positiva (Mp);
3. Se a população é média (M) então a variação é alta positiva (Ap);
4. Se a população é média alta (MA) então a variação é média positiva (Mp);
5. Se a população é alta (A) então a variação é baixa positiva (Bp);
6. Se a população é altíssima (AL) então a variação é baixa negativa (Bn).

Temos pelas regras 5 e 6 que A e AL são subconjuntos fuzzy sucessivos tais que existem $z_1, z_2 \in \text{supp}(A \cup AL)$ onde Δ_{z_1} e Δ_{z_2} possuem sinais contrários, pois $\text{supp}(B_n) \subset \mathbb{R}^-$ e $\text{supp}(B_p) \subset \mathbb{R}^+$. Logo, o subconjunto fuzzy dado por $\text{supp}(A^*)$ tal que $A^* = \text{supp}(A \cap AL)$ é um conjunto viável de equilíbrio, veja [7].

Sejam r e s as funções de pertinência de A e AL respectivamente. Sejam, ainda, f e g as funções de pertinência de B_n e B_p respectivamente. Temos que $\text{supp}(A^*) = [c_1, c_2] = [225, 275]$, $z_1 = c_1 = 225$ e $z_2 = c_2 = 275$.

As funções de pertinência r e s são dadas por:

$$r(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 175 \\ \frac{x - 175}{50}, & \text{se } 175 < x \leq 225 \\ \frac{275 - x}{50}, & \text{se } 225 < x \leq 275 \\ 0, & \text{se } x > 275 \end{cases}$$

e

$$s(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 225 \\ \frac{x - 225}{50}, & \text{se } 225 < x < 275 \\ 1, & \text{se } 275 \leq x \leq 300 \end{cases}$$

Logo, na região viável de equilíbrio, temos:

$$r(x) = \begin{cases} 1 - \frac{275 - x}{50}, & \text{se } 225 < x \leq 250 \\ \frac{275 - x}{50}, & \text{se } 250 < x \leq 275 \end{cases}$$

e

$$s(x) = \begin{cases} \frac{x - 225}{50}, & \text{se } 225 < x \leq 250 \\ 1 - \frac{x - 225}{50}, & \text{se } 250 < x \leq 275 \end{cases}.$$

As funções de pertinência f e g são dadas por:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < -1 \\ t + 1, & \text{se } -1 \leq t \leq 0 \\ 0, & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

e

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ \frac{0.8 - t}{0.8}, & \text{se } 0 \leq t \leq 0.8 \\ 0, & \text{se } t > 0.8 \end{cases}.$$

Claramente $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$, as funções $r, s, f, g \in C^1$, r, s são monótonas por partes e f, g são estritamente monótonas, tais que:

i) $g(t) < f(-t), \forall t \in (0; 0.8)$. De fato:

$$f(-t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1 - t, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

e

$$1 - t > \frac{0.8 - t}{0.8} \Leftrightarrow -0.8t > -t \Leftrightarrow t > 0.$$

ii) $\frac{g'(q)}{f'(p)} > \frac{p^3}{q^3}, \forall p \in \text{int}(D_f), q \in \text{int}(D_g)$ e $f(p) < g(q)$. De fato:

$$f'(p) = 1, \forall p \in \text{int}(D_f), g'(q) = -1.25, \forall q \in \text{int}(D_g) \text{ e } \frac{g'(q)}{f'(p)} = -1.25.$$

Dado $q \in (0; 0.8)$, $\exists \bar{p} \in (-1; 0)$ tal que $f(\bar{p}) = g(q)$, isto é,

$$g(q) = \frac{0.8 - q}{0.8} = f(\bar{p}) = \bar{p} + 1 \Leftrightarrow \bar{p} = \frac{0.8 - q}{0.8} - 1 = -\frac{q}{0.8}.$$

Logo, fixado $q \in (0; 0.8)$, os pontos p tais que $f(p) < g(q)$ são os pontos $p \in (-1; \bar{p})$ onde $\bar{p} = -\frac{q}{0.8}$.

Assim, se

$$-1 < p < \bar{p} \Rightarrow -1 < p^3 < -\frac{q^3}{0.512} \Rightarrow \frac{p^3}{q^3} < -\frac{1}{0.512} = -1.95.$$

Portanto,

$$\frac{g'(q)}{f'(p)} = -1.25 > -1.95 > \frac{p^3}{q^3}.$$

$$\text{iii) } \left[\frac{r'(x)}{s'(x)} \right]' \leq 0, \forall x \in (225; 250), r(x) \neq s(x).$$

De fato, as funções de pertinência r e s no intervalo $(225; 250)$ são dadas por:

$$r(x) = 1 - \left(\frac{275 - x}{50} \right) \text{ e } s(x) = \frac{x - 225}{50}.$$

Como $r'(x) = \frac{1}{50}, \forall x \in (225; 250)$ e $s'(x) = \frac{1}{50}, \forall x \in (225; 250)$, segue que

$$\left[\frac{r'(x)}{s'(x)} \right]' = \left[\frac{\frac{1}{50}}{\frac{1}{50}} \right]' = [1]' = 0, \forall x \in (225; 250), r(x) \neq s(x).$$

Logo existe um único ponto de equilíbrio $x^* \in [225, 250]$. Para maiores detalhes sobre estabilidade de sistemas dinâmicos p-fuzzy consulte [7].

Simulações numéricas, feitas no software MATLAB, mostram as soluções do sistema p-fuzzy convergindo para o ponto $x = 238.5$. Como existe um único ponto de equilíbrio, segue que $x^* = 238.5$ é o ponto de equilíbrio do sistema p-fuzzy.

Figura 3: Solução do modelo p-fuzzy com condição inicial $x_0 = 10$.

A base de regras gera um conjunto de pontos, através do controlador fuzzy, que descreve a variação da população em função da própria população.

Figura 4: Conjunto de pontos (variações) gerado pela base de regras através do controlador fuzzy.

Recuperação da equação diferencial ordinária com modelo p-fuzzy

Temos a evolução, no contexto histórico, de modelos determinísticos que descrevem a dinâmica populacional de espécies isoladas, sendo alguns deles o modelo de Verhulst, Montroll, Blumberg e Turner (veja [4] e [6]). Todos esses modelos são dados por problemas de valores iniciais

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = \alpha(P)P = f(P), \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

e diferem na taxa de crescimento relativo da população $\alpha(P)$, onde esta incorpora mais parâmetros à medida que mais fatores ambientais são levados em consideração. O modelo p-fuzzy permite a determinação dos parâmetros e dos pontos de equilíbrio desses modelos determinísticos. Ajustando os modelos, através do toolbox Cftool do software MATLAB, ao conjunto de pontos de saída do modelo p-fuzzy, obtemos seus parâmetros:

Para o modelo de Verhulst, cuja variação é dada pela parábola:

$$f(P) = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right),$$

obtemos $r = 0.2021$ e $K = 238.5$.

Figura 5: Ajuste de curva do modelo de Verhulst ao conjunto de pontos obtido pelo controlador fuzzy.

Como os modelos de Verhulst, Montroll e Blumberg possuem os mesmos pontos de equilíbrio, fixamos $K = 238.5$ para estes modelos e determinamos os demais parâmetros.

ii) Para o modelo de Montroll, cuja variação é dada por:

$$f(P) = rP \left(1 - \left(\frac{P}{K}\right)^\beta\right), \text{ obtemos } r = 0.01621 \text{ e } \beta = 1.449.$$

Figura 6: Ajuste de curva do modelo de Montroll ao conjunto de pontos obtido pelo controlador fuzzy.

iii) Para o modelo de Blumberg, cuja variação é dada por:

$$f(P) = rP^\eta \left(1 - \frac{P}{K}\right)^\gamma, \text{ obtemos } r = 0.008761, \eta = 1.192 \text{ e } \gamma = 1.056.$$

Figura 7: Ajuste de curva do modelo de Blumberg ao conjunto de pontos obtido pelo controlador fuzzy.

iv) Para o modelo de Turner, cuja variação é dada por:

$$f(P) = r P^{1+\beta(1-\gamma)} \left[1 - \left(\frac{P}{k}\right)^\beta\right]^\gamma,$$

fixado $k = 250$, obtemos $r = 0.03476$, $\beta = 1.521$ e $\gamma = 1.119$.

Figura 8: Ajuste de curva do modelo de Turner ao conjunto de pontos obtido pelo controlador fuzzy.

Conclusão

Observamos que a solução do sistema p-fuzzy, que descreve um modelo de crescimento populacional unidimensional inibido, é muito próxima das soluções dos modelos determinísticos, onde as soluções desses modelos já são conhecidas da literatura clássica.

Com a base de regras, através do controlador fuzzy, obtemos a variação da população em função da própria população.

O sistema p-fuzzy, permite ainda, a determinação dos parâmetros e pontos de equilíbrio de modelos determinísticos. Desta forma, podemos decidir qual modelo determinístico se adapta melhor aos dados experimentais mesmo quando estes são escassos ou subjetivos.

Referências Bibliográficas

1. L. C. Barros, R. C. Bassanezi, Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática, Textos didáticos, Coleção IMECC - Unicamp, Campinas - SP, 2006.
2. L. C. Barros, R. S. M. Jafelice, R. C. Bassanezi, Usando a Teoria Fuzzy na Modelagem de Fenômenos Biológicos, Simpósio de Aplicações em Lógica Fuzzy, Sorocaba - SP, 2008.
3. L. C. Barros, M. S. Peixoto, R. S. M. Jafelice, R. C. Bassanezi, Mini Curso Introdução à Lógica Fuzzy, Simpósio de Aplicações em Lógica Fuzzy, Sorocaba - SP, 2006.
4. R. C. Bassanezi, W. C. Ferreira Jr., Equações Diferenciais com Aplicações, Editora Harbra Ltda., São Paulo, 1988.
5. M. S. Cecconello, J. D. M. Silva, R. C. Bassanezi, Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Modelagem Alternativa para Sistemas Biológicos, Notas em Matemática Aplicada - Volume 50 SBMAC, São Carlos - SP, 2010.
6. J. D. Murray, Mathematical Biology, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, United States of America, 1989.
7. J. D. M. Silva, Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos p-fuzzy com Aplicações em Biomatemática, Tese de Doutorado, IMECC - Unicamp, Campinas, 2005.